Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 18-04-04

1. (a) Omskrivning ger ekvationen

$$2(x^2+x-2)yy' = (2x+1)(1+y^2).$$

Vi har $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, som är $\neq 0$, när $x>1$. Division ger

$$\frac{2yy'}{1+y^2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$$

som är separabel.
Vi har

$$\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \ln(1+y^2)$$

och

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx = \ln|x^2+x-2| + C_1$$

Eftersom vi söker lösning definierad i 2 kan vi förutsätta $x>1$, så $|x^2+x-2| = x^2+x-2$. Exponentiering ger $1+y^2 = C(x^2+x-2)$, där $C=e^{C_1}$. Villkoret $y(2)=\sqrt{3}$ ger nu $C=1$. Vi löser ut y och får $y=\pm\sqrt{x^2+x-3}$, där bara $y=\sqrt{x^2+x-3}$ gäller, eftersom $y(2)=\sqrt{3}$.

Svar: $y(x)=\sqrt{x^2+x-3}$.

(b) Ekvationen har den karakteristiska ekvationen $0=r^2-4r+4=(r-2)^2$, så lösningsformeln ger att den homogena ekvationen har lösningarna
$y=e^{2x}(A+Bx)$, där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker partikulärlösning genom ansatsen $y_p=a+bx$ och har $y_p'=b$ samt $y_p''=0$. I ekvationen ger detta $4a-4b+4bx=8x$, så vi ska ha $b=2$, $a=2$.
Samtliga lösningar till ekvationen ges nu av $y=y_h+y_p=e^{2x}(Ax+B)+2+2x$.

Svar: $y=e^{2x}(Ax+B)+2+2x$, där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Vi gör variabelbytet $s=\sqrt{t}$, dvs $t=s^2$ och har då $dt=2s\,ds$. Detta ger via partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{t}-8}{(\sqrt{t}+2)(\sqrt{t}-2)^2} &= 2\int \frac{s^2-8s}{(s+1)(s-2)^2}\,ds = 2\int \left(\frac{1}{s+1}-\frac{4}{(s-2)^2}\right)ds = \\ &= 2\ln|s+1| + \frac{8}{s-2} = 2\ln(\sqrt{t}+1) + \frac{8}{\sqrt{t}-2}\end{aligned}$$

Svar: $2\ln(\sqrt{t}+1)+8/(\sqrt{t}-2)$.

(b) Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{8}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx &= \Big[x^2(1+x^2)^{3/2}/3\Big]_0^{\sqrt{8}} - \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{8}} x(1+x^2)^{3/2}\,dx \\ &= 72 - \frac{2}{15}\Big[(1+x^2)^{5/2}\Big]_0^{\sqrt{8}} = 72 - \frac{484}{15} = \frac{1080-484}{15} = \frac{596}{15}.\end{aligned}$$

Svar: 596/15.

3. Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{ termer av högre grad}\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \text{ termer av högre grad}\\ e^t &= 1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \text{ termer av högre grad}\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}x^3\sin x &= x^4 - x^6/6 + x^8/120 + \cdots = \\ &= x^4 + \text{ termer av högre grad}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}e^{-x^2}\cos x - 1 + ax^2 &= (1 - x^2 + x^4/2 - x^3/6 + \cdots)(1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots) - 1 + ax^2 = \\ &= (-1 - 1/2 + a)x^2 + (1/24 + 1/2 + 1/2)x^4 + \text{ termer av högre grad.}\end{aligned}$$

Vi får

$$\frac{x^3\sin x}{e^{-x^2}\cos x - 1 + ax^2} = \frac{x^4 + \text{ termer av högre grad}}{(a-3/2)x^2 + (25/24)x^4 + \text{ termer av högre grad}}.$$

Om koefficienten i framför x^2 i nämnaren är $\neq 0$ kommer förkortning med x^2 i bråket att ge gränsvärde $\neq 0$ i nämnaren, medan täljaren kommer att ha gränsvärdet 0, vilket gör att bråket då har gränsvärdet 0, när $x \to 0$. Alltså ska vi ha $a - 3/2 = 0$.

Med detta värde på a har vi

$$\begin{aligned}\frac{x^3\sin x}{e^{-x^2}\cos x - 1 + 3x^2/2} &= \frac{x^4 + \text{ termer av högre grad}}{(25/24)x^4 + \text{ termer av högre grad}} = \\ &= \frac{x^4}{x^4}\cdot\frac{1 + \text{ termer med } x}{25/24 + \text{ termer med } x} \to 24/25,\end{aligned}$$

när $x \to 0$.

Svar: $a = 3/2$ och gränsvärdet blir 24/25.

4. Med

$$a_n = \frac{3^{n-1}x^n}{n(2n+3)}$$

har vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2n+3}{2(n+1)+3} \cdot \frac{3^n}{3^{n-1}} \to |x| \cdot 3$$

när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $3|x| < 1$ och divergent när $3|x| > 1$. Detta ger att konvergens när $|x| < 1/3$ och divergens när $|x| > 1/3$.

När $x = -1/3$ får vi serien $\sum 1/(3n(2n+3))$. Vi sätter $a_n = 1/(3n(2n+3))$ och $b_n = 1/n^2$. Serien $\sum 1/n^2$ är känd som konvergent. Vi har att $a_n/b_n = n^2/(6n^2+9n) \to 1/6 > 0$, så jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att serierna med termer a_n respektiver b_n har samma förhållande till konvergens. Eftersom serien med termerna b_n är konvergent är alltså även serien med termerna a_n konvergent. Potensserien är därför konvergent när $x = 1/3$.

När $x = -1/3$ har vi en alternerande serie där termer utan teckenväxlingen är $a_n = 1/(3n(2n+3)$. Vi ser att a_n avtar mot 0, så förutsättningarna i kriteriet för konvergens av alternerande serier är uppfyllt. Detta ger att potensserien är konvergent när $x = -1/3$.

Svar Konvegensintervallet är $[-1/3, 1/3]$.

5. Ekvationen $5 = \sqrt{9 + x^2}$ blir efter kvadrering $x^2 + 9 = 25$, och har därför lösningarna $x = \pm 4$. Om $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$ kan volymen enligt skivformeln beräknas som

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^{4} (5^2 - f(x)^2)\,dx = \pi \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\,dx = \pi \Big[\, 16x - x^3/3 \,\Big]_{-4}^{4} = \\ &= 2\pi(16 \cdot 4 - 64/3) = 4\pi \cdot 64/3 = 256\pi/3 \end{aligned}$$

Svar: $256\pi/3$.

6. Med $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ har vi enligt formel att ytans area ges av

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Vi har $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$, vilket ger

$$1 + (f'(x))^2 = (4 + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})/4 = (e^{2x} + 2 + e^{-2x})/4 = (e^x + e^{-x})^2/4.$$

Detta ger att $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = f(x)$. Vi får alltså

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 f(x)^2\,dx = (2\pi)/4 \cdot \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,dx = \frac{\pi}{2}\Big[\, e^{2x}/2 + 2x - e^{-2x}/2 \,\Big]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2}) \end{aligned}$$

Svar: $\pi(e^2 + 4 - e^{-2})/4$.

7. Vi har Maclaurinserien

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \cdots = \sum_{n=1}(-1)^{n-1}x^n/n, \quad \text{när } -1 < x \leq 1.$$

Detta ger

$$\frac{1}{t}\ln(1-t) = -1 - t/2 - t^2/3 - \cdots = -\sum_{n=1} t^{n-1}/n, \text{ när } 0 < t < 1.$$

Termvis integration ger

$$\int \frac{1}{t}\ln(1-t)\,dt = -(t + t^2/2^2 + t^3/3^2 + \cdots) = -\sum_{n=1} t^n/n^2 = p(t).$$

Potensserien $p(t)$ är alltså en primitiv funktion till $\ln(1-t)/t$ på intervallet $(0,1)$ och är konvergent åtminstone när $-1 \leq t < 1$. När $t = 1$ har vi $p(1) = -\sum 1/n^2$ som är känd som konvergent. Funktionen $p(t)$ har alltså konvergensintervallet $[-1,1]$ och är därför kontinuerlig där. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\,dt &= \Big[p(t)\Big]_0^1 = \lim_{t\to 1} p(t) - \lim_{t\to 0} p(t) = \\ &= p(1) - p(0) = -\sum_{n=1}\frac{1}{n^2} - 0 (= -\pi^2/6 \text{ enligt ett berömt resultat}).\end{aligned}$$

Svar: Integralen är konvergent (med värdet $-\pi^2/6$).