

## Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 18-08-20

1. (a) Division med  $x^2 + 1 (> 0)$  ger

$$y' - \frac{x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Vi har

$$- \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

så en integrerande faktor ges av

$$e^{-\ln(x^2+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Multiplikation med den ger ekvationen

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}y\right) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Integration och multiplikation med  $\sqrt{x^2 + 1}$  ger

$$y = \sqrt{x^2 + 1}(\arctan x + C),$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

**Svar:**  $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}(\arctan x + C)$ , där  $C$  är en godtycklig konstant.

- (b) Ekvationen har den karakteristiska ekvationen  $0 = r^2 - 2r = r(r - 2)$ , så lösningsformeln ger att den homogena ekvationen har lösningarna  $y_h = Ae^{0x} + Be^{2x} = A + Be^{2x}$ , där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter. Vi söker partikulärlösning genom ansatsen  $y_p = a \cos x + b \sin x$  och har

$$\begin{aligned}y_p &= a \cos x + b \sin x \\y_p' &= -a \sin x + b \cos x \\y_p'' &= -a \cos x - b \sin x\end{aligned}$$

som i ekvationens vänster led ger  $-(a + 2b) \cos x - (b - 2a) \sin x$  som alltså ska bli  $\cos x$ . Det ger  $a + 2b = -1$  och  $-2a + b = 0$  vilket ger  $5a = -1$  och  $5b = -2$ .

Samtliga lösningar till ekvationen ges nu av  $y = y_h + y_p = A + Be^{2x} - (\cos x + 2 \sin x)/5$ .

**Svar:**  $y = A + Be^{2x} - (\cos x + 2 \sin x)/5$ , där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

2. (a) Kvadratkomplettering och omskrivning ger

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{x}{2 + 2x + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left( \frac{2(x+1)}{1 + (x+1)^2} - \frac{2}{1 + (x+1)^2} \right) dx = \\&= \frac{1}{2} \left[ \ln(1 + (1+x)^2) - 2 \arctan(x+1) \right]_{-1}^0 = \\&= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1 - 2(\pi/4 - 0)) = (\ln 4 - \pi)/4\end{aligned}$$

**Svar:**  $(\ln 4 - \pi)/4$ .

(b) Partiell integration och partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \arctan x \, dx &= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx = \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right).\end{aligned}$$

**Svar:**  $-\arctan x/x + \ln(x^2/(1+x^2))/2$ .

3. Vi har kända Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ termer av högre grad} \\ e^t &= 1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \dots \text{ termer av högre grad}\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}e^x - e^{-x} &= 2x + 2x^3/3! + 2x^5/5! + 2x^7/7! + \dots \text{ termer av högre grad} = \\ &= 2(x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \dots \text{ termer av högre grad})\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(e^x - e^{-x}) \sin x &= 2(x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \dots \text{ termer av högre grad}) \cdot \\ &\quad \cdot (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots \text{ termer av högre grad})\end{aligned}$$

Maclaurinpolynomet  $p_7(x)$  till  $f(x)$  består av alla termer av grad högst sju i denna produkt. Vi får

$$\begin{aligned}p_7(x) &= 2(x^2 + (-1/3! + 1/3!)x^4 + (1/5! - 1/(3!)^2 + 1/5!)x^6) = \\ &= 2x^2 + 2(1/60 - 1/36)x^6 = 2x^2 - (8/360)x^6 = 2x^2 - x^6/45.\end{aligned}$$

**Svar:**  $2x^2 - x^6/45$ .

4. (a) Med

$$a_n = \frac{5^{n-1}x^n}{2n(3n+1)}$$

har vi

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \cdot \frac{2n}{2(n+1)} \cdot \frac{3n+1}{3(n+1)+1} \cdot \frac{5^n}{5^{n-1}} \rightarrow |x| \\ &= 5|x| \cdot \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2}{2+2/n} \cdot \frac{3+1/n}{3+4/n} \rightarrow 5|x| \end{aligned}$$

när  $n \rightarrow \infty$ . Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när  $5|x| < 1$  och divergent när  $5|x| > 1$ . Detta ger att konvergens när  $|x| < 1/5$  och divergens när  $|x| > 1/5$ . När  $|x| = 1/5$  är  $x = \pm 1/5$ .

När  $x = -1/5$  får vi serien  $\sum (-1)^n / (10n(3n+1))$ , som är alternerande. Eftersom  $1/(10n(3n+1))$  avtar mot 0 ger kriteriet för konvergens av alternerande serier att vi har konvergens när  $x = -1/5$ .

När  $x = 1/5$  har vi serien  $\sum 1/(10n(3n+1))$ .

Vi sätter  $a_n = 1/(10n(3n+1))$  och  $b_n = 1/n^2$ . Serien  $\sum 1/n^2$  är känd som konvergent. Vi har att  $a_n/b_n = n^2/(10n(3n+1)) \rightarrow 1/(10 \cdot 3) > 0$ , så jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att serierna med termer  $a_n$  respektive  $b_n$  har samma förhållande till konvergens. Eftersom serien med termerna  $b_n$  är konvergent är alltså även serien med termerna  $a_n$  konvergent. Potensserien är därför konvergent när  $x = 1/5$ .

**Svar** När  $x \in [-1/5, 1/5]$ .

(b) Vi har  $0 < 1/(n(n-3)) < 1/((n-3)(n-3)) = 1/(n-2)^2$  och att  $\sum 1/n^2$  är konvergent, eftersom  $2 > 1$ . Jämförelsekriteriet ger att serien är konvergent. För partialsumman  $S_N = \sum_{n=4}^N 1/(n(n-3))$  gäller

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{3} \left( \sum_{n=4}^N \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} \left( \sum_{n=1}^{N-3} \frac{1}{n} - \sum_{n=4}^N \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \rightarrow \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}, \end{aligned}$$

när  $N \rightarrow \infty$ .

**Svar:** 11/18.

5. Området i första kvadranten begränsas uppåt av  $y = \sqrt{16-x^2}$  och nedåt av  $y = \sqrt{6x}$ . Kurvornas skärningspunkt löser ekvationen  $16-x^2 = 6x$ , dvs  $0 = x^2 + 6x - 16 = (x+3)^2 - 25 = (x-2)(x+8)$ . Bara  $x = 2$  är aktuellt.

Skalformen ger att kroppens volym  $V$  ges av

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x(\sqrt{16-x^2} - \sqrt{6x}) dx = 2\pi \left[ -\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} - \sqrt{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{2\pi}{15} \left( -5(12\sqrt{12} - 16 \cdot 4) - \sqrt{6} \cdot 24\sqrt{2} \right) = \frac{8\pi}{15} (80 - 21\sqrt{12}). \end{aligned}$$

**Svar:**  $16\pi(40 - 21\sqrt{3})/15$ .

6. Omskrivning och variabelbytet  $u = \cos x$ ,  $du = -\sin x$  ger

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 dx}{\sin 2x + 2 \sin x} = \int \frac{2 dx}{2 \cos x \sin x + 2 \sin x} = \\ &= \int \frac{dx}{\sin x(\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)(\cos x + 1)} dx = \\ &= \int \frac{du}{(u^2 - 1)(u + 1)} = \int \frac{du}{(u - 1)(u + 1)^2} \end{aligned}$$

Ansats för partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(u - 1)(u + 1)^2} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} + \frac{C}{(u + 1)^2}.$$

Handpålägging ger  $A = 1/4$ ,  $C = -1/2$ . Insättningen av (t.ex)  $u = 0$  ger sen  $-1 = -1/4 + B - 1/2$ , dvs  $B = -1/4$ .

Detta ger

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 1} = \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{(\cos x - 1)^2}{\sin^2 x} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\sin x} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \end{aligned}$$

**Svar:**  $(\ln |(\cos x - 1)/\sin x| + 1/(\cos x + 1))/2$ .

7. (a) Med

$$a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n!} \cdot x^n$$

har man

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\cos((n+1)\pi/3)}{\cos(n\pi/3)} \right| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot |x|.$$

Här är  $|\cos(k\pi/3)| = 1$ , när  $k$  är delbart med 3 och  $|\cos(k\pi/3)| = 1/2$  annars. Detta ger

$$0 \leq \left| \frac{\cos((n+1)\pi/3)}{\cos(n\pi/3)} \right| \leq 2,$$

vilket ger

$$0 \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 2 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x| \rightarrow 0 < 1,$$

när  $n \rightarrow \infty$ . Instängningsregeln ger att  $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow 0$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Kquotkriteriet ger därför att potensserien konvergerar för alla  $x$ .

**Svar:**  $(-\infty, \infty)$ .

(b) Vi har via termvis derivering och omnumrering

$$\begin{aligned}
 p'' - p' + p &= \sum_{n=2} \frac{\cos(n\pi/3)}{(n-2)!} \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1} \frac{\cos(n\pi/3)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!} \cdot x^n = \\
 &= \sum_{n=0} \frac{\cos((n+2)\pi/3)}{n!} \cdot x^n - \sum_{n=0} \frac{\cos((n+1)\pi/3)}{n!} \cdot x^n + \sum_{n=0} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!} \cdot x^n = \\
 &= \sum_{n=0} (\cos((n+2)\pi/3) - \cos((n+1)\pi/3) + \cos(n\pi/3)) \cdot \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Additionsformler för  $\cos x$  ger

$$\begin{aligned}
 \cos((n+2)\pi/3) &= \cos(n\pi/3)\cos(2\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(2\pi/3) \\
 \cos((n+1)\pi/3) &= \cos(n\pi/3)\cos(\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(\pi/3)
 \end{aligned}$$

Vilket ger  $\cos((n+2)\pi/3) - \cos((n+1)\pi/3) = -\cos(n\pi/3)$ . Detta ger

$$p'' - p' + p = \sum_{n=0} (-\cos(n\pi/3) + \cos(n\pi/3)) \cdot \frac{x^n}{n!} = 0$$

(c) Vi har, enligt uttrycken ovan, att  $p(0) = 1$ ,  $p'(0) = 1/2$  och att  $p(x)$  löser  $y'' - y + y = 0$ , som har den karakteristiska ekvationen  $r^2 - r + 1 = 0$ , som har lösningarna  $r = (1 \pm i\sqrt{3})/2$ , som i sin tur ger

$$y = e^{x/2} \left( A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2) \right).$$

Eftersom  $p(0) = 1$  ska vi ha  $A = 1$ . Derivering ger

$$y' = e^{x/2} \left( -(\sqrt{3}/2) \sin(\sqrt{3}x/2) + B(\sqrt{3}/2) \cos(\sqrt{3}x/2) + (1/2) \cos(\sqrt{3}x/2) + (B/2) \sin(\sqrt{3}x/2) \right).$$

Eftersom  $p'(0) = 1/2$  ska vi ha  $y'(0) = \sqrt{3}B/2 + 1/2 = 1/2$ , så  $B = 0$ .

**Svar:**  $p(x) = e^{x/2} \cos(\sqrt{3}x/2)$ .