Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 19-01-16

1. (a) Division med $x^2 + 1\,(> 0)$ ger

$$y' + 2xy = x^3.$$

Eftersom $\int 2x\,dx = x^2$ är e^{x^2} en integrerande faktor. Multiplikation med denna ger ekvationen

$$D(e^{x^2} y) = x^3 e^{x^2}.$$

Integration ger

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \{\text{ PI }\} = \frac{1}{2}\,x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(x^2-1)e^{x^2},$$

vilket ger

$$e^{x^2} y = \frac{1}{2}\,(x^2-1)e^{x^2} + C,$$

där C är en godtycklig konstant. Muliplikation med e^{-x^2} ger

$$y(x) = \frac{1}{2}\,(x^2-1) + Ce^{-x^2}.$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{2}\,(x^2-1) + Ce^{-x^2}$, där C är en godtycklig konstant.

(b) Ekvationen har den karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + 2r + 5 = (r+1)^2 + 4 = (r+1-2i)(r+1+2i)$, så lösningsformeln ger att den homogena ekvationen har lösningarna $y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker partikulärlösning genom ansatsen $y_p = ax + b$ och har

$$\begin{aligned} y_p &= ax + b \\ y_p' &= a \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$$

som i ekvationens vänstra led ger $5ax + (2a + 5b)$ som alltså ska bli $5x + 7$. Det ger $a = 1$, $b = 1$.
Samtliga lösningar till ekvationen ges nu av
$y = y_h + y_p = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + x + 1.$

Svar: $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + x + 1$ där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Variabelbytet $t = 2\sqrt{x}$ ger $1/\sqrt{x} = 2/t$, $x = t^2/4$ och $dx = t/2\,dt$. När $x = 1$ är $t = 2$ och $x \to \infty$ motsvaras av $t \to \infty$. Det blir alltså

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\Big)e^{-2\sqrt{x}}\,dx &= \int_2^\infty \Big(\frac{2}{t} + 2\Big)\,e^{-t}\cdot\frac{t}{2}\,dt = \int_2^\infty (1+t)\,e^{-t}\,dt = \{\text{ PI }\} = \\ &= \Big[-(1+t)e^{-t}\Big]_2^\infty + \int_2^\infty e^{-t}\,dt = 3e^{-2} + \Big[-e^{-t}\Big]_2^\infty = 4e^{-2} \end{aligned}$$

Svar: $4/e^2$.

(b) Partiell integration och partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^3} \arctan x \, dx &= \Big[-\frac{1}{2x^2} \arctan x \Big]_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\
&= -\frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \Big) \, dx = \\
&= -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \Big[-\frac{1}{x} - \arctan x \Big]_1^{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} + 1 + \frac{\pi}{4} \Big) = \\
&= -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{12} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \\
&= \frac{\pi}{36} + \frac{3-\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

Svar: $\pi/36 + (3-\sqrt{3})/6$.

3. Kända Maclaurinutvecklingar ger

$$\begin{aligned}
x - \sin x &= \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \text{ termer av högre grad} \\
\ln(1+t) &= t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \text{ termer av högre grad}
\end{aligned}$$

Detta ger

$$\ln(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \text{ termer av högre grad}$$

och

$$\begin{aligned}
f(x) &= 6(x^3/6 - x^5/120 + x^7/5040 + \text{ termer av högre grad}) \cdot \\
&\quad \cdot (x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \cdots \text{ termer av högre grad}) - x^5 = \\
&= (-1/2 - 1/20)x^7 + \text{ termer av högre grad.}
\end{aligned}$$

Maclarinpolynomet för $f(x)$ har som koefficient framför x^7 talet $f^{(7)}(0)/7!$ vilket ger

$$f^{(7)}(0) = -7! \cdot \frac{11}{20} = -11 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = -11 \cdot 252 = -2772$$

Svar: -2772.

4. (a) Med

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(2n-1)}$$

har vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \cdot \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+2}\cdot|x| \to |x|$$

när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $|x| < 1$ och divergent när $|x| > 1$.

När $x = \pm 1$ gäller att $|a_n| = 1/(2n^2 - n)$. Serien $\sum 1/n^2$ med termerna $b_n = 1/n^2$ är känd som konvergent och $|a_n|/b_n \to 1/2 > 0$, när $n \to \infty$. Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger därför att $\sum |a_n|$ är konvergent. Alltså är $\sum a_n$ (absolut)konvergent.

Svar När $x \in [-1, 1]$.

(b) Om vi sätter

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(2n-1)}$$

är den sökta summan $p(1/3)$ och

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n+1}.$$

Det gäller att

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n+1}.$$

Sätter vi $t = \sqrt{x}$ får vi

$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x}.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x}\,dx &= \left\{\begin{array}{r} t = \sqrt{x} \\ 2\,dt = dx/\sqrt{x}\end{array}\right\} = 2\int\arctan t\,dt = \\ &= \{\text{ PI }\} = 2\Big(t\arctan t - \int\frac{t}{1+t^2}\,dt\Big) = \\ &= 2t\arctan t - \ln(1+t^2) = 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1+x)\end{aligned}$$

gäller att $p(x) = 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1+x) + C$. Men $p(0) = 0$ så $C = 0$.
Av detta följer att den sökta summan av serien är

$$p(1/3) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} - \ln(4/3)$$

Svar: $\sqrt{3}\pi/9 - \ln(4/3)$.

5. Kurvornas skärningspunkt löser ekvationen $(2-x) = 2/(x+1)$, dvs $0 = x^2 - x = x(x-1)$. När $x \in [0,\,1]$ gäller att $2 - x \geq 2/(x+1)$. Skivformeln ger att kroppens volym är

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \Big((2-x)^2 - \frac{4}{(x+1)^2} \Big)\, dx = \pi \Big[-\frac{1}{3}\,(2-x)^3 + \frac{4}{x+1} \Big]_0^1 = \\ &= \pi \Big(-\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} - 4 \Big) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $\pi/3$.

6. Sätt $y(t)$ till antalet mol av ämnet C vid tiden t. Vid tiden t är då $1 - y(t)$ antalet mol av A och antalet mol av B är $2 - y(t)$.

Eftersom antalet mol av C aldrig kan överstiga antalet mol av A vid start gäller att $0 \leq y(t) \leq 1$.

Texten i uppgiften ger att

$$y' = 0,3\,(1-y)(2-y) - 0,2\,y = 0,3\,y^2 - 1,1\,y + 0,6 = 0,1\,(3y^2 - 11y + 6) = 0,1\,(y-3)(3y-2).$$

Ekvationen seprareras till

$$\frac{10y'}{(y-3)(3y-2)} = 1.$$

Eftersom

$$\int \frac{10y}{(y-3)(3y-2)}\, dy \;=\; \frac{10}{7} \int \Big(\frac{1}{y-3} - \frac{3}{3y-2} \Big)\, dt = \frac{10}{7}\, \ln \Big| \frac{y-3}{3y-2} \Big|$$

gäller att

$$\ln \Big| \frac{y-3}{3y-2} \Big| = \frac{7t}{10} + C_1.$$

Exponentiering ger

$$\frac{y-3}{3y-2} = C\, \mathrm{e}^{7t/10} = f(t).$$

Vi har $y(0) = 0$, så $C = 3/2$.

Detta ger

$$\begin{aligned} y - 3 &= f(3y-2) \\ y(1-3f) &= 3 - 2f \\ y(t) &= \frac{6 - 6\mathrm{e}^{7t/10}}{2 - 9\mathrm{e}^{7t/10}} \to \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

när $t \to \infty$.

Svar: Antalet mol av ämnet C är $(6 - 6\mathrm{e}^{7t/10})/(2 - 9\mathrm{e}^{7t/10})$ vid tiden t. Långsiktigt finns det $2/3$ mol av ämnet C i behållaren.

7. Substitutionen $t = \tan x$ ger $dt = dx/\cos^2 x$ och $1 + t^2 = 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$. Detta ger

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} &= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \\
&= \int \frac{1}{2+t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(t/\sqrt{2}) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\tan(x)/\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Svar: $\sqrt{2}\arctan(\tan(x)/\sqrt{2})/2$.