Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 19-04-24

1. (a) Ekvationen kan skrivas

$$y' - (2x+1)y = -2x\mathrm{e}^x$$

som är linjär av första ordningen. Eftersom $\int(-2x-1)\,dx = -x^2 - x$ är e^{-x^2-x} en integrerande faktor. Muliplikation med den ger

$$D(y\mathrm{e}^{-x^2-x}) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

som integreras till

$$y\mathrm{e}^{-x^2-x} = \mathrm{e}^{-x^2} + C,$$

där C_1 är en godtycklig konstant. Multiplikation med e^{x^2+x} ger nu

$$y = \mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{x^2+x} = \mathrm{e}^x(1 + C\mathrm{e}^{x^2}).$$

(b) Ekvationen kan skriva $y' = x(y^2 - 2y)$ och är därför separabel. Vi ser att y konstant 0 och konstant 2 är två (jämvikts)lösningar.
Division med $y^2 - 2y = y(y-2)$ ger

$$\frac{y'}{y(y-2)} = x.$$

PBU ger

$$\int \frac{dy}{y(y-2)} = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\Big)\,dy = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{y-2}{y}\Big|$$

så integration ger

$$\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{y-2}{y}\Big| = \frac{x^2}{2} + C_1$$

som via exponentiering ger

$$\frac{y-2}{y} = C\mathrm{e}^{x^2},$$

där C är en godtycklig konstant $\neq 0$, men även $C = 0$ duger eftersom $y = 2$ är en lösning. Vi sätter högerledet till f och får $y - 2 = yf$, som ger $y(1-f) = 2$ och

$$y = \frac{2}{1-f} = \frac{2}{1 - C\mathrm{e}^{x^2}}.$$

Svar: $y = 2/(1 - C\mathrm{e}^{x^2})$, där C är en godtycklig konstant, samt lösningen y konstant 0.

2. (a) Handpåläggning i PBU ger

$$\int \frac{3x-1}{x(x-1)(x+1)}\,dx \quad = \quad \int\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}\Big)\,dx = \ln\Big|\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}\Big|.$$

Svar: $\ln|(x(x-1))/(x+1)^2|$.

(b) Upprepad partiell integration ger

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(x)\mathrm{e}^{2x}\,dx = \sin(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\int \sin(x)\mathrm{e}^{2x}\,dx = \\ &= \sin(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\Big(-\cos(x)\mathrm{e}^{2x} + 2\int \cos(x)\mathrm{e}^{2x}\,dx\Big) = \mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x) - 4I, \end{aligned}$$

som ger

$$I = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x).$$

Svar: $\mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x)/5$.

3. Kända Maclaurinutvecklingar ger

$$\begin{aligned} x - \sin x &= \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \text{ termer av högre grad} \\ \ln(1+t) &= t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \text{ termer av högre grad} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\ln(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \text{ termer av högre grad}$$

och

$$(x - \sin x)\ln(1+x^2) = x^5/6 + \text{ termer av högre grad}$$

Eftersom $\cos t = 1 - t^2/2! + t^4/4! + \ldots$, gäller att $\cos x^2 = 1 - x^4/2 + \ldots$ och

$$x(\cos x^2 - 1) = -x^5/2 + \text{ termer av högre grad}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{(x-\sin x)\ln(1+x^2)}{x(\cos x^2 - 1)} &= \frac{x^5/6 + \text{ termer av högre grad}}{-x^5/2 + \text{termer av högre grad}} = \\ &= \frac{1/6 + \text{ termer med } x}{-1/2 + \text{ termer med } x} \to -1/3, \end{aligned}$$

när $x \to 0$.

Svar: $-1/3$.

4. (a) Med

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n}$$

gäller att

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| \cdot \frac{2n}{2n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot x^2 \to x^2$$

när $n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien är (absolut)konvergent när $x^2 < 1$ och divergent när $x^2 > 1$, dvs konvergens när $-1 < x < 1$.

När $x = \pm 1$ gäller att serien är aterneranade och $1/(2n)$ avtar mot noll när $n \to \infty$. Kriteriet för alternerande serier ger därför att serien är konvergent när $x = \pm 1$.

Svar När $x \in [-1, 1]$.

(b) Om vi sätter

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n}$$

är den sökta summan $p(1/2)$.
Det gäller att

$$p(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n}.$$

Eftersom $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^n/n$ är

$$p(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad \text{och} \quad p(1/2) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \ln\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Svar: $\ln(2\sqrt{5}/5)$.

5. Skalformeln ger att kroppens volym är

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2} x\cos x\,dx = \{\text{ PI }\} = 2\pi\left(\Big[x\sin x\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} - \int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin x\,dx\right) = \\ &= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \Big[\cos x\Big]_{\pi/6}^{\pi/2}\right) = 2\pi\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi^2}{6} - \sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

Svar: $5\pi^2/6 - \sqrt{3}\pi$.

6. Subsitutionen $x = 2/\cos t$ ger $dx = 2\sin t/\cos^2 t \cdot dt$ och $x^2 - 4 = 4\tan^2 t$. När $t = 0$ är $x = 2$ och när $t \to \pi/2^-$ gäller att $x \to \infty$.

Alltså gäller att

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{(2/\cos t)2\tan t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Svar: $\pi/4$.

7. Grafen har i punkten $P = (a,\, f(a))$ tangent med ekvation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Den skär y-axeln i $Q = (0,\, f(a) - af'(a))$. Om vi låter O beteckna origo ska det gälla att $|\,QO\,| = |\,QP\,|$, dvs $|\,QO\,|^2 = |\,QP\,|^2$. Det ger ekvationen

$$(f(a) - af'(a))^2 = a^2 + (af'(a))^2.$$

Det betyder att de f som duger är lösningarna till differentialekvaionen

$$y^2 - 2xyy' = x^2.$$

Sätter vi $z = y^2$ blir ekvationen $z - xz' = x^2$, eller $z' - z/x = -x$. Den integrerande faktorn är $1/x$. Multiplikation med den ger $D(z/x) = -1$, så $z/x = -x + C$, $y^2 = -x^2 + Cx$ och $y = \pm\sqrt{Cx - x^2}$, där C är en godtycklig konstant. För att lösningen ska vara definierad krävs att $0 \leq x(C-x)$. För att den ska vara definierad när $x > 0$ krävs därför att $C > 0$.

(Eftersom $x^2 - Cx + y^2 = 0$ gäller precis när $(x - C/2)^2 + y^2 = C^2/4$ är grafen till y övre eller undre delen av cirkeln med medelpunkt i $(C/2,\, 0)$ och radie $C/2$.)

Svar: $y = \pm\sqrt{x^2 + Cx}$, där C är en godtycklig positiv konstant.