Lösningar till MVE017 Matematisk analys i en variabel för I1 19-08-19

1. (a) Ekvationen kan skrivas

$$y' - 3x^2 y = 3x^2$$

Eftersom $\int -3x^2\,dx = -x^3$ är e^{-x^3} en integrerande faktor. Multiplikation med denna ger ekvationen

$$D(\mathrm{e}^{-x^3}y) = 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Integration ger

$$\mathrm{e}^{-x^3}y = \int 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}\,dx + C = -\mathrm{e}^{-x^3} + C.$$

vilket ger

$$y = -1 + C\mathrm{e}^{x^3},$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar: $y(x) = -1 + C\mathrm{e}^{x^3}$, där C är en godtycklig konstant.

(b) Ekvationen har den karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$, så lösningsformeln ger att den homogena ekvationen har lösningarna
$y_h = \mathrm{e}^{-2x}(A + Bx)$, där A och B är godtyckliga konstanter.
Vi söker partikulärlösning genom att först sätta ansatsen $y_p = z_p\mathrm{e}^{2x}$. Det ger

$$\begin{aligned} y_p &= z_p\mathrm{e}^{2x} \\ y_p' &= (z_p' + 2z_p)\mathrm{e}^{2x} \\ y_p'' &= (z_p'' + 2z_p' + 2z_p' + 4z_p)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

som i ekvationens vänstra led ger $(z_p'' + 8z_p' + 16z_p)\mathrm{e}^{2x}$. Efter division med e^{2x}, som alltid är > 0, får man

$$z_p'' + 8z_p' + 16z_p = 16x^2.$$

Ansats av z_p till $a + bx + cx^2$ ger

$$\begin{aligned} z_p &= a + bx + cx^2 \\ z_p' &= b + 2cx \\ z_p'' &= 2c \end{aligned}$$

som i ekvationen ger

$$(2c + 8b + 16a) + (16c + 16b)x + 16cx^2 = 16x^2,$$

eller $c = 1$, $b = -1$ och $a = 6/16 = 3/8$.
Detta ger

$$y_p = (3/8 - x + x^2)\mathrm{e}^{2x}.$$

Samtliga lösningar till ekvationen ges nu av

$$y = y_h + y_p = \mathrm{e}^{-2x}(Ax + B) + (3/8 - x + x^2)\mathrm{e}^{2x}.$$

Svar: $y = \mathrm{e}^{-2x}(Ax+B)+(3/8-x+x^2)\mathrm{e}^{2x}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Variabelbytet $t = \cos x$ ger $dt = -\sin x\,dx$. Omskrivning och detta ger

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{2\cos x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{2t}{2+t^2}\,dt = \\
&= -\ln(2+t^2) = -\ln(2+\cos^2 x).
\end{aligned}$$

Svar: $-\ln(2+\cos^2 x)$.

(b) Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,dx &= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-(2-x)^2}}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1-((2-x)/2)^2}}\,dx = \\
&= \Big[-\arcsin\Big(\frac{2-x}{2}\Big)\Big]_0^4 = \\
&= -(\arcsin(-1) - \arcsin 1) = \pi/2 + \pi/2 = \pi.
\end{aligned}$$

Svar: Konvegent med värdet π.

3. Vi har summan av den geometiska serien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = 1/(1-x)$ när $|\,x\,| < 1$.

Detta ger

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
-\frac{1}{(1+x)^2} &= D\Big(\frac{1}{1+x}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n \\
\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^2 &= -x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) x^n.
\end{aligned}$$

Svar: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$ respektive $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) x^n$.

4. (a) Den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ är känd som divergent. Med $b_n = 1/n$ och $a_n = 1/(n+\sqrt{n})$ gäller att

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+1/\sqrt{n}} \to 1 > 0,$$

så jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att även serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+\sqrt{n})$ är divergent.

Svar Divergent.

(b) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är känd som konvergent. Med $b_n = 1/n^2$ och $a_n = n^2/(n^4-1)$ gäller att

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^4}{n^4-1} = \frac{1}{1-1/n^4} \to 1 > 0,$$

när $n \to \infty$, så jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att även serien $\sum_{n=2}^{\infty} n^2/(n^4-1)$ är konvergent.

Svar Konvergent.

(c) Det gäller att serien är alternerande och att $1/\sqrt{n}$ avtar mot noll när $n \to \infty$. Kritereit för alternerande serier ger därför att serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ är konvergent

Svar Konvergent.

5. Längden av kurvan ges av

$$\int_1^8 \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Det gäller att

$$y' = x^{-1/3}(1+x^{2/3})^{1/2}, \quad 1+(y')^2 = x^{-2/3}(x^{2/3}+(1+x^{2/3})).$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_1^8 \sqrt{1+(y')^2}\,dx &= \int_1^8 x^{-1/3}\sqrt{1+2x^{2/3}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^{2/3} \\ dt = (2/3)x^{-1/3}\,dx \end{array} \right\} = \\
&= \frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\Big[(1+2t)^{3/2}\Big]_1^4 = \frac{1}{2}\cdot(27-3\sqrt{3}) = \\
&= \frac{3}{2}\cdot(9-\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Svar: $3(9-\sqrt{3})/2$.

6. Variabelbytet $x = 2/\cos t$ ger $dx = 2\sin t/\cos^2 t\,dt$ och $x^2 - 4 = 4(1/\cos^2 t - 1) = 4\tan^2 t$ samt $t \in [0, \pi/2)$, när $x \in [2, \infty)$.

   Detta ger

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\dfrac{2}{\cos t}\cdot 2\tan t} \cdot \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

   Svar: Konvergent med värdet $\pi/4$.

7. Det gäller, när $-1 < x < 1$, att $1/(1+x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$ vilket ger att $-1/(1+x)^2 = D(1/(1+x)) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n n x^{n-1}$ och

$$x^2 \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=2}^\infty (-1)^{n-1}(n-1)x^n.$$

   Ansats av y som potensserie ger

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^\infty a_n x^n & y &= \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \\ y' &= \sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1} & -xy' &= \sum_{n=1}^\infty (-n a_n) x^n \\ y'' &= \sum_{n=2}^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} & 2x^2 y'' &= \sum_{n=2}^\infty 2n(n-1) a_n x^n \end{aligned}$$

   Insättning av detta i ekvationen ger

$$a_0 + (a_1 - a_1)x + \sum_{n=2}^\infty (2n(n-1) - n + 1) a_n x^n = \sum_{n=2}^\infty (-1)^{n-1}(n-1)x^n$$

   vilket ger $a_0 = 0$, a_1 godtycklig och

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{(2n-1)(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

   när $n \geq 2$.

   Alltså är

$$y = a_1 x + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^n.$$

   Det gäller att

$$\begin{aligned} \arctan t &= \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n-1} \\ t\arctan t &= \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n} \end{aligned}$$

När $x \geq 0$ ger $t = \sqrt{x}$ att

$$\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^n = x + y - a_1 x$$

Detta ger, med $C = (a_1 - 1)$,

$$y = \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) + Cx,$$

där C är godtycklig.

Svar: $y = \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) + Cx$, där C är godtycklig. (Insättning visar att det också är lösningarna då $x > 0$ och inte bara då $0 < x < 1$.)