Tentamen i Matematisk Analys i en variabel för I1, MVE 016 MATEMATIK

2013 – 12 – 18 kl 8.30 – 12.30 Chalmers

Hjälpmedel: inga (men ett formelblad medföljer)

Telefonvakt: Anders Martinsson

Tel 0703 – 088 304

Ange den tillfälliga tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida.

Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället.

Till uppgifterna 1 – 3 krävs bara mycket kortfattade motiveringar.

1. Beräkna följande integraler: **(9p)**

   a. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$

   b. $\int \cos(\sin x) \cdot \cos x \, dx$

   c. $\int x^4 \ln x \quad dx$

2.

   a. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergent? **(2p)**

   b. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{arctan(n)}$ konvergent? **(2p)**

   c. För vilka *x* konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n \cdot 3^n}$? **(3p)**

3. **(6p)**

a. Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen $e^{x+y} \cdot y' = 1$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$

b. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy' + 3y = x^2$

Till uppgifterna 4 – 8 skall lösningarna vara tydligt motiverade.

4. Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)}$ **(5p)**

5. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - e^{-x^2}}{\ln(1+x^4)}$ **(5p)**

6. Beräkna volymen av det område vars bas är en triangel i (*x,y*)-planet med hörn i punkterna (0,0), (3,0) samt (0,2), och där tvärsnitten i rät vinkel mot *x*-axeln bildar halvcirklar. **(5p)**

7. Bestäm de värden på konstanten *a* som gör att samtliga lösningar till differentialekvationen $y'' + ay = \sin 2t$ blir ***begränsade***, dvs så att $|y(t)| \leq K$ för någon konstant *K*. **(6p)**
(*Det är alltså inte nödvändigt att bestämma lösningarna explicit*)

8.

a. Formulera integralkriteriet för en positiv, avtagande serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **(2p)**

b. För varje positivt heltal N, visa att:

$$\frac{1}{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$$ **(5p)**