

# MATEMATISKA VETENSKAPER

Chalmers

Tentamen i MVE016 Matematisk analys i en variabel för I1.

Tid: 2017-08-14, kl 8.30 - 12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare (men formelblad medföljer).

Telefonvakt: 031-772 5325.

---

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas. Resultat meddelas via Ladok inom tre veckor.

Lösningar finns på kursens webbsida [www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve016/1617/](http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve016/1617/) senast 15/8.

Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. a) Lös differentialekvationen  $(2 + \cos x)y' + \sin(x)y = (2 + \cos x)^2$ . 3p

b) Lös differentialekvationen (begynnelsevärdesproblemet)  
 $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 1$ . 5p

2. Beräkna

a)  $\int_0^1 \frac{t+2}{(t+1)^3} dt$       b)  $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{1 + \cos 2t} dt$ .

3p+5p

3. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 5 till funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x \arctan x^2}{1 - x^2}.$$

4p

4. a) För vilka värden på  $x$  konvergerar potensserien

$$p(x) = x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4k+1}?$$

(Dvs bestäm seriens konvergensintervall.) Argumentera noga!

b) Uttryck  $p(x)$  med hjälp av elementära funktioner (dvs "vanliga" funktioner). 3+3p

**Var god vänd!**

5. Cirkeln  $x^2 + y^2 = 5$  och kurvan  $y = 2/x$  avgränsar tillsammans ett begränsat område i första kvadranten. Området roterar runt  $x$ -axeln så att en kropp uppstår. Beräkna kroppens volym. 6p
6. Kommunen gälds åt att industriföretaget Sekinum etablerat verksamhet uppströms ån Tillan, som utgör den enda tillrinningen till Rensjön, kommunens populära badsjö. Etableringen orskar emellertid ett konstant utsläpp av Polyphyphan i Tillan, vars koncentration i mynningen till Rensjön är  $c$  kg/m<sup>3</sup>. Enda avrinningen av Rensjön sker genom ån Bortan i takten  $r$  m<sup>3</sup>/h, vilket är samma takt som tillrinningen sker via Tillan. Rensjöns volym, som alltså är oförändrad över tid, beräknas till  $V$  m<sup>3</sup>.
- a) Vilken är den långsiktiga mängden Polyphyphan i Rensjön, om inget görs? 1p
- b) Låt  $f(t)$  vara mängden Polyphyphan (mätt i kg) i Rensjön  $t$  h efter utsläppets start. Utgå från att  $f(0) = 0$  och att koncentrationen av ämnet alltid är samma i hela sjön. Ange en differentialekvation som  $f(t)$  löser. 2p
- c) Hur lång tid efter utsläppets start ( $t = 0$ ) är koncentrationen av Polyphyphan  $c/2$  i Rensjön? 3p
- (Svaren kommer att innehålla konstanterna  $r$ ,  $c$  och  $V$ .)
7. Bestäm längden av grafen till  $f(x) = e^x$ ,  $\ln(3)/2 \leq x \leq \ln(8)/2$ . 6p
8. Visa att om potensserien  $p(x) = \sum c_n x^n$  konvergerar för  $x = b$  ( $b \neq 0$ ) och divergerar när  $x = d$  ( $d \neq 0$ ), så gäller att  $p(x)$  konvergerar för alla  $x$  med  $|x| < |b|$  och divergerar för alla  $x$  med  $|x| > |d|$ . 6p