MVE022 – Facit till rekommenderade uppgifter med jämnt nummer

J A S, VT 2019

OBS! I flera av uppgfiterna nedan kan man argumentera på olika sätt och komma fram till korrekt slutsats. Se svaren nedan som exempel på vad som är korrekta svar.

Lay 1.4: 34 Förutsättning: Man har en kvadratisk matris (3×3 men det är inte nödvändigt) A och en vektor $\mathbf{b}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har precis en lösning. Visa då: varje vektor $\mathbf{c}$ av samma form som $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av kolonnerna i A.

Att $\mathbf{c}$ är en linjärkombination av kolonnerna i A är samma påstående som att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ är lösbart. Vi vet att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har precis en lösning.

Överför $(A \mid \mathbf{b})$ till $(U \mid \mathbf{b}')$ på reducerad trappstegsform. Eftersom $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning är sista kolonnen i $(U \mid \mathbf{b}')$ inte en pivotkolonn. Eftersom det finns precis en lösning är varje kolonn i U pivotkolonn (inga fria variabeler).

Tag nu godtyckligt $\mathbf{c}$ och överför $(A \mid \mathbf{c})$ till reducerade trappstegsform $(U \mid \mathbf{c}')$. Här kan vi vara säkra på att U är den reducerade trappstegsformen av A eftersom den är entydig. Eftersom varje kolonn i U är pivotkolonn och matrisen är kvadratisk betyder det att sista kolonnnen i $(U \mid \mathbf{c}')$ inte är pivotkolonn. Därmed har $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ en (entydigt lösning för varje $\mathbf{c}$.

Lay 1.5: 30 Förutsättning: A är en 3×3-matris med två pivotpositioner.

(a) Har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en icke-trivial lösning ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)?

Överför A till trappstegsform U. Eftersom A har två pivotpositionern har U tre kolonner men bara två av dem är pivotkolonner. Alltså finns en fri variabel och $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har oändligt många lösningar. Svar: Ja.

(b) Är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$?

Överför $(A \mid \mathbf{b})$ till trappstegsform $(U \mid \mathbf{b}')$. Eftersom A har tre rader men bara två pivotpositioner består nedersta raden i U av enbart nollor. Vi väljer $\mathbf{b}'$ så att sista koordinaten inte är 0. Då är sista kolonnen i $(U \mid \mathbf{b}')$ pivotkolonn och $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. (Vi får $\mathbf{b}$ från $\mathbf{b}'$ genom att göra radoperationerna baklänges.) Svar: Nej.

Laty 1.5: 32 Förutsättning: A är en 2×4-matris med två pivotpositioner.

(a) Har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en icke-trivial lösning ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)?

Överför A till trappstegsform U. Eftersom A har tre kolonner och två pivotpositioner är en kolonn i U inte pivotkolonn. Det finns allstå en fri variabel, så $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har oändligt många lösningar. Svar: Ja.

(b) Är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$?

Överför $(A \mid \mathbf{b})$ till trappstegsform $(U \mid \mathbf{b}')$. Eftersom A har två rader och två pivotpositioner kan sista kolonnen i $(U \mid \mathbf{b}')$ inte vara pivotkolonn. Alltså är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Svar: Ja.

Lay 1.5: 38 Förutsättning: A är en 3×3-matris och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ en vektor sån att $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ saknar lösning.

Fråga: Finns det då nån vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ har precis en lösning?

Överför $(A \mid \mathbf{y})$ till trappstegsform $(U \mid \mathbf{y}')$. Sista kolonnen är här en pivotkolonn. En rad i U (och A) saknar därför pivotposition. Eftersom A är en kvadratisk matris är minst en kolonn i A inte pivotkolonn.

Överför $(A \mid \mathbf{z})$ till trappstegsform $(U \mid \mathbf{z}')$. För att $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ ska vara lösbar måste vi välja $\mathbf{z}$ så att sista kolonnen inte är pivotkolonn. Men för varje sånt val kommer en kolonn i U att inte vara pivotkolonn. Det finns alltså då fri variabel och oändligt många lösningar. Svar: Nej.

Lay 1.7: 24

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lay 1.7: 26

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lay 2.1: 22 Förutsättning: kolonnerna i B är linjärt beroende. Visa: kolonnerna i AB är linjärt beroende.

Eftersom kolonnerna i B är linjärt beroende har $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en lösning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Multiplikation med A från vänster ger $AB\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Här är resultatet i vänstra ledet en icke-trivial linjärkombo av kolonnerna i AB som alltså blir nollvektorn. Därför är kolonnerna i AB linjärt beroende.

Lay 2.1: 24 Förutsättning: A och D är två matriser så att $AD = I_m$ (så A har m rader och D har m kolonner och antalet kolonner i A är samma som antalet rader i D).

Visa att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Eftersom $AD = I_m$ gäller att $AD\mathbf{b} = I_m\mathbf{b} = \mathbf{b}$. det betyder att $x = D\mathbf{b}$ är en lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Lay 2.1: 26 Förutsättning: A är en $3 \times n$-matris vars kolonner spänner $\mathbb{R}^3$. Redogör för hur man kan bestämma en $n \times 3$ matris D så att $AD = I_3$.

Eftersom kolonnerna i A spänner $\mathbb{R}^3$ gäller att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Välj $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ som de tre kolonnerna i I_3 och låt $\mathbf{d}_1$ vara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{d}_2$ vara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{d}_3$ vara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$. Sätt $D = (\,\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3\,)$.

Då gäller

$$AD = A\left(\,\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3\,\right) = \left(\,A\mathbf{d}_1 \quad A\mathbf{d}_2 \quad A\mathbf{d}_3\,\right) = \left(\,\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3\,\right) = I_3$$

Lay 2.2: 20 Förutsättning: A, B och X är $n \times n$-matriser såna att A, X och $A - AX$ är inverterbara och dessutom gäller att

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B.$$

(a) Redogör för att B är inverterbar.

Multiplikation med X från vänster i sambandet $(A - AX)^{-1} = X^{-1}B$ ger $X(A - AX)^{-1} = B$. Eftersom inversen till en inverterbar matris är inverterbar är $(A - AX)^{-1}$ inverterbar. Eftersom produkten av inverterbara matriser är inverterbar är $X(A - AX)^{-1}$ inverterbar, dvs B är inverterbar.

(b) Lös ut X ur sambandet $(A - AX)^{-1} = X^{-1}B$.

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B$$

Multiplicera båda sidor med $A - AX$ från vänster

$$\begin{aligned}(A - AX)(A - AX)^{-1} &= (A - AX)X^{-1}B \\ I &= AX^{-1}B - AIB \\ I + AB &= AX^{-1}B\end{aligned}$$

Här ser man att $I + AB$ är en produkt av inverberabar matriser och därför inverterbar. Multiplicera med B^{-1} från höger och A^{-1} från vänster

$$A^{-1}(I + AB)B^{-1} = X^{-1}$$

Invertera båda sidor

$$B(I + AB)^{-1}A = X$$

Lay 2.8: 2 T.ex. ligger vektorerna $-\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ i H, men det gör inte $\mathbf{e}_2 + (-\mathbf{e}_1)$.

Lay 2.8: 4 T.ex. ligger vektorn $\mathbf{e}_1$ i H, men det gör inte $(-1)\mathbf{e}_1$.