MVE022 – Urval av bevis (på svenska)

J A S, VT 2019

Sats 1 (Lay: Theorem 7, Section 2.2.)

1. *En $n \times n$-matris A är inverterbar precis när den är radekvivalent med indentitetsmatrisen I_n.*
2. *När så är fallet gäller att samma sekvens av radoperationer som överför A till I_n, överför I_n till A^{-1}.*

Bevis

1. Antag först att A är inverterbar. Det gäller då att visa att A är radekvivalent med I_n.

Eftersom A är inverterbar har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, för multiplikation med A^{-1} från vänster ger $\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Liksom varje matris är A radekvivalent med en matris U på reducerad trappstegsform. Ekvationerna $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har samma lösningar, dvs enbart $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har därför inga fria variabler, så varje kolonn i U är därmed en pivot-kolonn. Eftersom U är på reducerad trappstegsform är därför de enda nollskilda elementen i U ettor som är placerade längs huvuddiagonalen. Att U är kvadratisk (har samma form som A) ger att $U = I_n$. Detta ger att A är radekvivalent med I_n.

Antag nu att A är radekvivalent med I_n, dvs $A \sim I_n$. Det gäller att visa att A är inverterbar.

En radoperation motsvarar multiplikation från vänster med en elementär matris, så det finns därför en sekvens $E_1, E_2, \ldots, E_p$ av såna så att

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \ldots E_p(E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A) = (E_p \cdots E_2 E_1)A = I_n.$$

Eftersom elementära matriser är inverterbara och produkt av inverterbara matriser är inverterbar gäller att $(E_p \cdots E_2 E_1)$ är inverterbar. Vi multiplicerar med dess invers från vänster i sista likheten ovan och får

$$A = (E_p \cdots E_2 E_1)^{-1}(E_p \cdots E_2 E_1)A = (E_p \cdots E_2 E_1)^{-1} I_n = (E_p \cdots E_2 E_1)^{-1}$$

och ser att A är inverterbar med inversen

$$A^{-1} = \left((E_p \cdots E_2 E_1)^{-1}\right)^{-1} = E_p \cdots E_2 E_1.$$

2. Från 1. vet vi att $A^{-1} = E_p \cdots E_1 = (E_p \cdots E_1)I_n$. Högra ledet är här resultatet av att utsätta I_n för samma sekvens av radoperationer som överför A till I_n.Det betyder att samma radoperationer som överför A till I_n överför I_n till A^{-1}. $\square$

Sats 2 (Lay: Theorem 6, Section 3.2.) *Om A och B är $(n \times n)$-matriser så gäller*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Anm

1. Att matriserna är kvadratiska är en förutsättning för att determinanterna ska finnas.
2. Att A och B har samma form är en (tillräcklig) förutsättning för att produkten ska finnas (eftersom de är kvadratiska).
3. I beviset används att satsen redan är känd när $A = E$ är en elementär matris. Detta är sambandet mellan radoperationer och determinanter som redogörs för i Lay: Theorem 3, Section 3.2.

Bevis

Antag först att A inte är inverterbar. Vi vet då att $\det(A) = 0$, så högra ledet i satsens likhet är 0.

När A inte är inverterbar kan heller inte AB vara inverterbar, för vi vet att det då finns ett $\mathbf{b}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Då kan heller inte $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha en lösning för ett sådant $\mathbf{x}$ skulle ge att $A(B\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Vi har därför att $\det(AB) = 0$ och vänstra ledet i satsens likhet är därför också 0.

Antag nu att A är inverterbar. Då vet vi att A radekvivalent med I_n, så det finns en sekvens $E_1, E_2, \ldots, E_p$ av elementära matriser så att

$$A = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 \cdot I_n = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1.$$

Vi skriver nu $|A|$ för $\det(A)$ eftersom det blir tydligare då. För en elementär matris E och en godtycklig matris C är det känt att $|EC| = |E| \cdot |C|$. Detta ger nu vid upprepad användning

$$|AB| = |E_p \cdots E_1 B| = |E_p||E_{p-1} \cdots E_1 B| = \ldots = |E_p| \cdots |E_1||B| = \ldots = |E_p \cdots E_1||B| = |A||B|.$$

□

Sats 3 (Lay: Theorem , Section 4.5) *Om vektorrummet V har en bas med n vektorer, så är varje uppsättning av fler än n vektorer i V linjärt beroende.*

Bevis

Enligt förutsättning har V en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bestående av n vektorer. Denna bas ger en linjär avbildning $V \to \mathbb{R}^n$, som till vektorn $\mathbf{v}$ ordnar dess koordinater $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ relativt basen.

Tag nu en uppsättning $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ av fler än n vektorer i V (så att $n < p$). Då är de p vektorerna $[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}}$ linjärt beroende i $\mathbb{R}^n$, eftersom $n < p$. Alltså finns skalärer $c_1, c_2, \ldots, c_p$ som inte alla är 0, så att

$$c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + c_2[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_p[\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{nollvektorn i } \mathbb{R}^n.$$

Eftersom avbildningen $V \to \mathbb{R}^n$, som till en vektor ordnar dess koordinater relativt **B** är linjär gäller att

$$[c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = c_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + c_2[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_p[\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p = 0 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Eftersom som skalärerna $c_1, c_2, \ldots, c_p$ inte alla är noll ger det att vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ är linjärt beroende. $\square$

Sats 4 (Lay: Theorem 10, Section 4.5) *Om ett vektorrum V har en bas bestående av n vektorer, så har varje bas för V också precis n vektorer.*

Bevis

Antag att $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$ är baser för V med n respektive m vektorer. Vi ska visa att $n = m$.

Eftersom V har en bas med n vektorer vet vi att fler än n vektorer i V är linjärt beroende. Vektorerna i $\mathcal{B}_2$ är linjärt oberoende, så vi får att $m \leq n$.

Eftersom V har en bas med m vektorer, så gäller likaså att $n \leq m$, för vektorerna i $\mathcal{B}_1$ är linjärt oberoende.

Tillsammans ger $n \leq m$ och $m \leq n$ att $n = m$. $\square$

Sats 5 (Lay: Theorem 11, Section 4.5) *Antag att V är ett vektorrum av ändlig dimension och att H är ett delrum till V. Då gäller*

1. *Varje uppsättning linjärt oberoende vektorer i H kan kompletteras till en bas för H.*
2. *H har ändlig dimension och* $\dim H \leq \dim V$.

Anm

Satsen gäller speciellt när $H = V$, så varje uppsättning linjärt oberoende vektorer i V kan, enligt satsen, kompletteras till en bas för V.

Bevis

1. Låt oss för att fixera tanken säga att V har dimension n och låt S = $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ vara en uppsättning linjärt oberoende vektorer i H. Vi ska visa att vi kan fylla på med ytterligare vektorer (vid behov) tills vi får en bas för H.

Om $\operatorname{Span} S = H$ är S redan en bas för H, så antag att $\operatorname{Span} S \neq H$. Välj en vektor $\mathbf{u}_{k+1}$ i H som inte ligger i $\operatorname{Span} S$.

Vi visar att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ är en uppsättning linjärt oberoende vektorer (i H). Tag därför skalärer $c_1, c_2, \ldots c_k, c_{k+1}$ så att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots c_k\mathbf{u}_k + c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0}.$$

Eftersom vektorerna i S är linjärt oberoende gäller, att om $c_{k+1} = 0$ så är alla $c_1, c_2, \ldots, c_k$ också 0. Om $c_{k+1} \neq 0$, kan vi ur likheten ovan lösa ut $\mathbf{u}_{k+1}$ som en linjärkombination av de övriga vektorerna, vilket skulle ge $\mathbf{u}_{k+1} \in \operatorname{Span} S$, som strider mot valet av $\mathbf{u}_{k+1}$. Alltså är $c_{k+1} = 0$, liksom alla $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Därför är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\ \mathbf{u}_{k+1}\}$ är en uppsättning linjärt oberoende vektorer i H.

Vi kan alltså utvidga S med $\mathbf{u}_{k+1}$ till en uppsättning linjärt oberoende vektorer. Proceduren kan upprepas så länge denna nya mängd S inte spänner ut H.

En uppsättning linjärt oberoende vektorer i H är också en sån uppsättning i V, för H är ett delrum till V.

Eftersom V har dimension n har därför en uppsättning linjärt oberoende vektorer vektorer i H högst n vektorer. Antalet vektorer i S kan alltså inte överstiga n, så till sist kommer vi att få att vektorerna i S spänner H och är linjärt oberoende, dvs utgör en bas för H.

2. Om H är delrummet som bara består av nollvektorn $\mathbf{0}$, så har H dimension 0 och påståendet gäller. Annars kan vi enligt 1. börja med en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i H och successivt utvidga till en bas för H. Eftersom linjärt oberoende vektorer i H också är linjär oberoende vektorer i V gäller att $\dim H \leq \dim V$. □

Sats 6 (Lay: Theorem 12, Section 4.5) *Antag att V är ett vektorrum av dimension $p \geq 1$. Då gäller*

1. *Varje uppsättning med (exakt) p linjärt oberoende vektorer är en bas för V, dvs spänner också ut V.*
2. *Varje uppsättning med (exakt) p vektorer som spänner ut V är också linjärt oberoende.*

Anm Om man alltså vet att V har dimension p, kan man avgöra om en uppsättning med p vektorer är en bas, genom att (enbart) antingen visa att de är linjärt oberoende eller att de spänner ut V.

Bevis

1. Antag att S är en uppsättning med p linjärt oberoende vektorer i V. Om $\operatorname{Span} S \neq V$ vet vi att S kan kompletteras till en bas för V. Eftersom V har dimensionen p och alla baser har p vektorer är detta inte möjligt. Alltså gäller att $\operatorname{Span} S = V$ och S är en bas för V.

2. Antag att S är en uppsättning med p vektorer som spänner ut V. Låt S' vara en delmängd till S, med så många vektorer som möjligt, så att S' är linjärt oberoende. Andra vektorer i S är då linjärkombinationer av vektorerna i S' så $\operatorname{Span} S' = \operatorname{Span} S = V$. Det betyder att S' är en bas för V. Eftersom alla baser för V har p vektorer gäller att $S = S'$ och att S är en bas för V. □

Sats 7 (Lay: Theorem 2, Section 5.1) *Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r$ är egenvektorer till matrisen A och att de hör till* olika *egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.*

Då gäller att uppsättningen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r\}$ är linjärt oberoende.

Bevis

Antag att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r\}$ är linjärt beroende. Vi ska visa att det leder till en motsägelse.

Ingen av vektorerna är nollvektorn $\mathbf{0}$, eftersom de alla är egenvektorer till A. Det betyder att uppsättningen $\{\mathbf{v}_1\}$ som bara består av vektorn $\mathbf{v}_1$ är linjärt oberoende.

Genom att successivt lägga till vektorer i tur och ordning hittar vi ett index p så att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende, men inte $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}\}$. Det betyder att $\mathbf{v}_{p+1}$ är en linjärkombination av vektorena $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$. Det finns därför tal $c_1, c_2, \ldots, c_p$ så att

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p+1}. \qquad (*)$$

Vi multiplicerar båda sidor med matrisen A och utnyttjar att vektorena alla är egenvektorer till A och får

$$\begin{aligned} c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p A\mathbf{v}_p &= A\mathbf{v}_{p+1} \\ c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\lambda_p\mathbf{v}_p &= \lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}. \end{aligned}$$

Vi multiplicerar $(*)$ med λ_{p+1} och subtraherar resultatet från sista likheten och får

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Eftersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende ger detta

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = 0, \quad c_2(\lambda_2 - \lambda_{p+1}) = 0, \ldots, c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) = 0.$$

Enligt förutsättning är λ_{p+1} inte är samma som nåt av de andra egenvärdena, så vi drar slutsatsen att $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$. Men då ger $(*)$ att $\mathbf{v}_{p+1} = \mathbf{0}$, vilket strider mot att $\mathbf{v}_{p+1}$ är en egenvektor till A. $\square$

Sats 8 (Lay: Theorem 5, Section 5.3) *En $(n \times n)$-matris A är diagonaliserbar precis när A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer.*

Anm

Att A har n linjärt oberoende vektorer kan också formuleras: $\mathbb{R}^n$ har en bas bestående av egenvektorer till A.

Bevis

Antag först att A är diagonaliserbar, så att det finns matriser

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

så att

$$A = PDP^{-1}.$$

Multiplikation med P från höger ger

$$\begin{aligned} AP &= PD \qquad \text{eller} \\ A\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{dvs} \\ \begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \ldots & A\mathbf{v}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \ldots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Detta visar att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är egenvektorer till A. Eftersom P är inverterbar har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så kolonnerna i P är även linjärt oberoende. Eftersom de är n stycken utgör de därmed en bas för $\mathbb{R}^n$.

Antag nu att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjär oberoende egenvektorer till A med tillhörande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Eftersom vektorerna är linjärt oberoende och $P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ är en kvadratisk matris är P inverterbar.

Vi har

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \dots & A\mathbf{v}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \dots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{pmatrix} \qquad \text{som ger} \\
A\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{som ger} \\
AP &= PD.
\end{aligned}
$$

Multiplikation med P^{-1} från höger ger $A = PDP^{-1}$ där D är diagonal. Alltså är A diagonaliserbar. □

Sats 9 (Lay: Theorem 1, Section 7.1) *Två egenvektorer till en symmetrisk matris A är ortogonala, om de hör till olika egenvärden.*

Bevis

Antag att $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ och att $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$, där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Då gäller att

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1\mathbf{v}_1)^\top\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^\top\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^\top A^\top\mathbf{v}_2 = \{\text{ A är symmetrisk }\} = \\
&= \mathbf{v}_1^\top A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^\top(\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_1^\top\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2.
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$
(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.
$$

Eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$, gäller därför att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är alltså ortogonala. □