MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i Linjär algebra för I1, (MVE012)
Tid: 2017-xx-yy, kl aa.bb - cc.dd
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: NN, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från våren 2017 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast ee/ff.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve021/1617/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

a) Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ på $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$. (2p)

b) Bestäm h så att det fyra vektorerna (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ -2-h \\ h \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende.

c) Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 11 & 15 & -7 & 6 \end{pmatrix}^T$, är en egenvektor till matrisen (2p)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ -5 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna $A^{21}\mathbf{v}$.

d) Kolonnerna i matrisen A nedan utgör en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$. Vektorn $\mathbf{v}$ har i denna bas koordinaterna $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ i standardbasen för $\mathbb{R}^3$. (D.v.s vilken vektor i $\mathbf{R}^3$ är $\mathbf{v}$?) (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) Matrisen A nedan är inverterbar. Bestäm inversen till A. (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

---

f) Bestäm en vektor som ligger i ortogonala komplementet till nollrummet av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 15 & 6 & -6 \\ -1 & -1 & 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Betäm dimensionen av nollrummet till matrisen A för olika värden på h, när (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -8+3h & -6+h & 2-h \\ 3 & 3 & -12+2h & -8+3h \end{pmatrix}.$$

b) För vilka värden på h ligger $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ i kolonnrummet till A? (2p)

3. a) Bestäm alla egenvärden till matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgör om A är diagonaliserbar eller ej. Motivera noga. (2p)

4. Lös följande system av differentialekvationer: (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 12x_1(t) - 16x_2(t) \\ x_2'(t) = 8x_1(t) - 12x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}.$$

5. Visa att avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ som definieras av (6p)

$$T(p(t)) = tp'(t) + p(t+1)$$

är linjär. Bestäm också en bas för $\mathbb{P}_2$, sån att matrisen för T relativt denna bas är diagonal.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange " sant" eller "falskt" ger ingen poäng. (6p)

a) Om $\mathbb{R}^n$ har en bas som består av egenvektorer till $n \times n$-matrisen A, så är A diagonaliserbar.

b) Om A och B är $n \times n$-matriser gäller att $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

c) Det finns 3×3-matriser med bara ett egenvärde med egenrum av dimension 1.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

7. Låt H vara ett delrum till ett vektorrum V av dimension n. Visa att varje uppsättning av linjärt oberoende vektorer i H kan utvidgas till en bas för H.

JAS