MVE 021 - Extenta VT 2017

1.a Ortogonala proj av $\bar{v}$ på $\bar{u}$ ges av

$$\text{proj}_{\bar{u}}\bar{v} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|^2}\bar{u} = \frac{1-2+2+4}{(1+4+4+16)}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5\\-2/5\\2/5\\4/5\end{pmatrix}$$

Svar $\begin{pmatrix}1/5\\-2/5\\2/5\\4/5\end{pmatrix}$

1b Fyra vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ är linjärt oberoende precis när $\det((\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\ \bar{v}_4)) \neq 0$ annars är de linjärt beroende

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & -1 & 2\\ 9 & -5 & -3 & h\\ -9 & 3 & 5 & -2-h\\ 9 & -3 & -3 & h\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & h-6\\ 0 & 0 & 2 & 4-h\\ 0 & 0 & 0 & h-6\end{vmatrix}$$

Triangulär så Det. $= 3(-2)\cdot 2\cdot(h-6)$

Svar $h=6$

1c

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix}-11+15-14+18\\ 33-45+0-18\\ -55+60-21+30\\ 11-15-14+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\-30\\14\\-12\end{pmatrix} = -2\bar{v}$$

Så $A^{21}v = (-2)^{21}\bar{v}$

Svar $\begin{pmatrix}-2^{21}\cdot 11\\ -2^{21}\cdot 15\\ 2^{21}\cdot 7\\ -2^{21}\cdot 6\end{pmatrix}$ $\left(= -2^{21}\begin{pmatrix}4\\15\\7\\6\end{pmatrix}\right)$

1d)

$$\bar{v} = A[\bar{v}]_B = \begin{pmatrix}2+2-4\\ 6-2+2\\ -2-1+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}$$

Svar $\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}$

1e) $(A|I_3) \sim (I_3|A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 13 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 13 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 13 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 26 & 7 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 13 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1\end{array}\right)$$ Svar $\begin{pmatrix}26 & 7 & 6\\ 13 & 4 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$

1f Bestämmer bas för NullA. Hittar sen vektor $\perp$ mot varje vektor i denna bas

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -15 & 6 & -6 \\ -1 & -1 & 7 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 24 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}_1} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{b}_2}$$

Söker $\bar{v}$ $\perp$ mot $\bar{b}_1, \bar{b}_2$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{v}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

t. ex duger $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{\text{Svar}}$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Löser $A\bar{x} = 0$, $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ samtidigt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -8+3h & -6+h & 2-h & 1 \\ 3 & 3 & -12+2h & -8+3h & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -12+3h & h & 4-h & -1 \\ 0 & -3 & -3+2h & -5+3h & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3+2h & -5+3h & -2 \\ 0 & -12+3h & h & 4-h & -1 \end{array}\right) \times (h-4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3+2h & -5+3h & -2 \\ 0 & 0 & h+(h-4)(-3+2h) & 3(h-4)(h-2) & 7-2h \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3+2h & -5+3h & -2 \\ 0 & 0 & 2(h-2)(h-3) & 3(h-4)(h-2) & 7-2h \end{array}\right)$$

Trappstegsform oavsett värde på h.

$h=2$ ger 2 fria variabler dim Null(A) = 2 och sista kolonnen pivot. $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ saknar lösning

$h=3$ En fri så dim Null(A) = 1, $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösbar

$h \neq 2, 3$ En fri, så dim Null(A) = 1, $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösbar

a) $\underline{\text{Svar}}$ dim Null(A) = $\begin{cases} 2 & \text{när } h=2 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$

b) $\underline{\text{Svar}}$ $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösbar när $h \neq 2$, ej lösbar när $h=2$.

Dvs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i colA om $h \neq 2$ men inte när $h=2$

3) Söker egenvärden till A (3)

$$0=|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 & -4 \\ 3 & -3-\lambda & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{kolom4} - \text{kolom1}\}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 & -3+\lambda \\ 3 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ -3-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(3+\lambda)(3+\lambda)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3+\lambda)^2(1-\lambda).$$

a) Egenvärden är $3, -3, -3, 1$: Svar

b) Om A diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, har A, D samma karakteristiska polynom (för similära). Ger att D har $+3, -3, -3, 1$ längs diagonalen. För diagonaliserbarhet krävs 2 linjärt oberoende ~~vektorer~~ egenvektorer till egenvärdet -3, dvs att $\dim(A+3I) = 2$

Här $$A+3I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ger nu

att $\dim \text{Null}(A+3I) = 1$ (en fri variabel) så det finns inte två linjärt oberoende egenvektorer till egenvärdet -3.

Svar A ej diagonaliserbar.

4) Ekv. är $\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} 12 & -16 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \bar{x}(t) = A\bar{x}(t)$ $\quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 4

Hoppas A diagonaliserbar.
Karakteristisk ekv. (för egenvärden):
$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 12-\lambda & -16 \\ 8 & -12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 144 + 128 = \lambda^2 - 16 = (\lambda-4)(\lambda+4)$
Olika egenvärden, så diagonaliserbar
Söker egenvektorer till egenvärden

$\lambda = 4$: $A - 4I = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ger (t.ex) $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -4$: $A + 4I = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ger (t.ex) $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Får $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}_{D}$, $A = PDP^{-1}$

$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) = PDP^{-1}\bar{x}(t)$. Sätt $\bar{y}(t) = P^{-1}\bar{x}(t)$
Mult. med P^{-1} från vänster: $\quad \bar{y}'(t) = P^{-1}\bar{x}'(t)$
$P^{-1}\bar{x}'(t) = DP^{-1}\bar{x}(t)$

Ekv. blir $\quad \bar{y}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \bar{y}(t)$, $\begin{cases} y_1'(t) = 4y_1(t) \\ y_2'(t) = -4y_2(t) \end{cases}$

Ger $\quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{4t} \\ c_2 e^{-4t} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Som ger $c_1 = -1$, $c_2 = 3$. och
$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{4t} + 3e^{-4t} \\ -e^{4t} + 3e^{-4t} \end{pmatrix}$

Svar ~~$\bar{x}$~~: $x_1(t) = -2e^{4t} + 3e^{-4t}$, $x_2(t) = -e^{4t} + 3e^{-4t}$

5, Bestäm först matrisen för T i basen $\{1, t, t^2\} = B$ för $\mathbb{P}_2$.

Har $T(1) = t \cdot 0 + 1 = 1$
$T(t) = t + (t+1) = 1 + 2t$
$T(t^2) = 2t^2 + (t+1)^2 = 1 + 2t + 3t^2$.

$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Matrisen har egenvärden
$\lambda = 1, 2, 3$ Best. egenvektorer

$\lambda = 1$ $\quad A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ t.ex $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [1]_B$

$\lambda = 2$ $\quad A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ t.ex $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [t+1]_B$

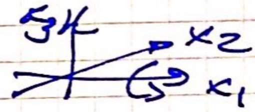
$\lambda = 3$ $\quad A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ t.ex $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eller $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$
$= [3 + 4t + 2t^2]$.

Svar Matrisen för T i basen $\{1, 1+t, \underbrace{3+4t+2t^2}_{p}\}$
är $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $(T(1) = 1$, $T(1+t) = 2(1+t)$, $T(p) = 3p$.

6a. Sant. om $\bar v_1 .. \bar v_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A gäller
$(A\bar v_1 \dots A\bar v_n) = (\lambda_1 \bar v_1 \dots \lambda_n \bar v_n)$ (λ_i egenvärden)
$A(\bar v_1 .. \bar v_n) = (\bar v_1 .. \bar v_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$
$AP = PD$, P inverterbar för $\bar v_1 .. \bar v_n$ bas
$A = PDP^{-1}$

6b) Falskt. T ex $1 = \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} = 0+0 \neq 1.$

6c) Rotation $\pi/2$ radianer runt x_1-axeln i $\mathbb{R}^3$ ger ett exempel (oavsett rotationsriktning)



$R\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}$ x_1-axeln är egenrummet till $\lambda = 1$
Inga andra vektorer ~~är~~ har egenskapen att $R(\bar v)$ är parallell med $\bar v$.

7) Antag att $\bar v_1 \dots \bar v_p$ är linjärt oberoende i H som är delrum till V av dim n.
Två fall 1) $\bar v_1 \dots \bar v_p$ bas för H. Saken är klar
2) span$(\bar v_1 .. \bar v_p) \neq H$.
I 2) välj $\bar v_{p+1} \in H$, $\bar v_{p+1} \notin$ span$\{\bar v_1 .. \bar v_p\}$
då är $\bar v_1 \dots \bar v_{p+1}$ linjärt oberoende
Processen kan upprepas och måste sluta i 1) eftersom högst n vektorer kan vara linjärt oberoende, för V har dimension n.