Lösningar till Tentamen MVE021
Linjär algebra I1 140603

1. (a) $\bar{v} = c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + c_3\bar{b}_3 \iff c_1, c_2, c_3$ är lösningar till systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right] (-4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_3 = -1 \end{cases} \iff$$

$$\iff c_1 = -1,\ c_2 = 2,\ c_3 = -1 \Rightarrow \boxed{[\bar{v}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} (-2)(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} (2) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har 3 pivotkolonner $\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ bas i } Col(A)}$

$Nul(A)$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \ ;\ \underline{x_3 = t},\ \underline{x_5 = s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -s \\ x_2 = \frac{1}{3}(6s + 3t) = 2s + t \\ x_1 = -2s - t - 2t - 2s - s = -5t - 3s \end{cases}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -5t-3s \\ 2s+t \\ t \\ -s \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{Nul(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

l.oberoende $\Rightarrow$ bas.

(c) Vektorerna ligger i samma plan omm determinanten $|\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & a \\ 2 & 1 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & a-5 \\ 0 & -7 & -21 \end{vmatrix} = -2 \cdot 21 + 7(a-5) = 0 \iff a - 5 = 6 \iff \boxed{a = 11}.$$

(d) $F(1,1) = (-1,1) \iff F(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = (-1,1) \iff F(\bar{e}_1) + F(\bar{e}_2) = (-1,1)$

$F(1,2) = (1,1) \iff F(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) = (1,1) \iff F(\bar{e}_1) + 2F(\bar{e}_2) = (1,1)$

$\Rightarrow F(\bar{e}_2) = (2,0)$, $F(\bar{e}_1) = (-3,1)$

$\Rightarrow$ standardmatrisen är $A = [F(\bar{e}_1)\ F(\bar{e}_2)] = \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$.

(e) $y = ax + b$; $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; $A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix}$.

$A^T A \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = A^T \bar{b} \iff \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix} \iff a = 7/10,\ b = \frac{14}{5}$

$\Rightarrow$ linjen har ekvationen $\boxed{y = \frac{7}{10} x + \frac{14}{5}}$.

(2). $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \overset{(-2)}{} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Systemet är ekvivalent med:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+x_4=0 \\ x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=-t+2s,\ x_2=2t-s \Rightarrow \bar{x}=\begin{bmatrix} -t+2s \\ 2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sätt $x_3=t$, $x_4=s$

$$\Rightarrow W=\text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

l. oberoende

En bas till W är $\boxed{\bar{c}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{c}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

Vi har $\bar{c}_1\cdot\bar{c}_2=-4\neq 0$.

Sätt $\bar{v}_1=\bar{c}_1$, $\bar{v}_2=\bar{c}_2-\dfrac{\bar{c}_2\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1}\bar{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\dfrac{4}{6}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

En ortogonal bas till W är alltså $\boxed{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$

(ii) $\text{proj}_W\bar{v}=\dfrac{\bar{v}\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1}\bar{v}_1+\dfrac{\bar{v}\cdot\bar{v}_2}{\bar{v}_2\cdot\bar{v}_2}\bar{v}_2=-\dfrac{6}{6}\bar{v}_1+\dfrac{6}{30}\bar{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+\dfrac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\boxed{\dfrac{3}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\bar{v}-\text{proj}_W\bar{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}-\dfrac{3}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6/5 \\ 14/5 \\ -22/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{avst}(\bar{v},W)=\|\bar{v}-\text{proj}_W\bar{v}\|=\boxed{\dfrac{12}{\sqrt{5}}}$.

(3). (i) Ekvationen $A\bar{x}=\bar{0}$ har icke-trivial lösning eftersom antalet obekanta är 6 och antalet ekvationer 4. Då har ekv. $A^TA\bar{x}=\bar{0}$ också icke-trivial lösning ty om $A\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow A^TA\bar{x}=A^T\bar{0}=\bar{0}$. Enligt inverterbarhetsatsen är A^TA ej inverterbar!

(ii) $A^TAX=BX+C \Leftrightarrow A^TAX-BX=C \Leftrightarrow (A^TA-B)X=C$

$A^TA=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[2\ 0\ 1]=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow A^TA-B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(-1)}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow (A^TA-B)^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X=(A^TA-B)^{-1}C=\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$

(4) (i) T.ex. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1=\lambda_2=0$, men egenrummet motsvarande $\lambda=0$ är linjen $x_2=0$, 1-dim men roten är dubbel!

(ii) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)-6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1=4,\ \lambda_2=-1}$.

Egenrummet till $\lambda_1=4$: $(A-4I)\bar{x}=\bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3t \\ x_2=2t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$

Egenrummet till $\lambda_2 = -1$: $(A+I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix}3&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-t\\x_2=t\end{cases}$

$$\Downarrow \quad \boxed{t\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}$$

Lösningen till diffekv.systemet ges av:

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{v}_2 = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

konstanterna c_1, c_2 hittas från $c_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + c_2\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 1/5,\ c_2 = 3/5$

$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = \frac{3}{5} e^{4t} - \frac{3}{5} e^{-t}}$, $\boxed{x_2(t) = \frac{2}{5} e^{4t} + \frac{3}{5} e^{-t}}$

(5). (i) Låt V= vara ett vektorrum med bas $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$.

Antag att $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in V$ och $m > n$. Vektorerna $[\bar{v}_1]_B, \dots, [v_m]_B$ är m vektorer i $\mathbb{R}^n$ och då måste de vara linjärt beroende. Alltså har ekvationen $x_1[\bar{v}_1]_B + \dots + x_m[\bar{v}_m]_B = \bar{0}$ en icke-trivial lösning.

Ekvivalent, $[x_1\bar{v}_1 + \dots + x_m\bar{v}_m]_B = \bar{0} \iff x_1\bar{v}_1 + \dots + x_m\bar{v}_m = \bar{0}$.

(ty koordinatavbildningen $V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är isomorfi). Vi har fått att $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ är l. beroende.

Om B' är en annan bas till V, $B' = \{\bar{b}_1', \dots, \bar{b}_p'\}$, och $p > n$, då måste $\bar{b}_1', \dots, \bar{b}_p'$ vara l. beroende, en motsägelse! Om $p < n$, då måste $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ vara l. beroende, också en motsägelse!

(ii) $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&1&1&-2\\1&0&-1&-3\end{bmatrix} \begin{matrix}(-2)\ (-1)\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-3&-4\\0&-1&-3&-4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&3&4\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow$ 2 pivot $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow$ $\dim U = 2$ och $\{p_1, p_2\}$ är en bas till U

$\mathbb{P}_2$ isomorf med $\mathbb{R}^3$

(via koordinatavbildningen)

För att komplettera $\{p_1, p_2\}$ till en bas för $\mathbb{P}_2$, kan man välja t.ex. t^2 och $\{p_1, p_2, t^2\}$ är en bas eftersom $\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ är inverterbar (determinant $-1 \neq 0$).

(6) Vi behöver en bas av egenvektorer till T. Låt oss hitta egenvärdena först.

$T(1) = 1 + 2t^2$, $T(t) = 3t$, $T(t^2) = 2 + t^2 \Rightarrow [T]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{bmatrix}$ är matrisen relativt basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&3-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) = 0 \iff (3-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda-1) = 0.$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$.

Egenvärdena till $[T]_\mathcal{E}$ är alltså 3 (dubbel) och -1.

Egenrummet som motsvarar $\lambda=3$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 = t \\ x_2 = s \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Låt $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Egenrummet som motsvarar $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Låt $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\{b_1, b_2, b_3\}$ är en bas av egenvektorer i $\mathbb{R}^3$. De motsvarar följande polynom $\boxed{B = \{1+t^2, t, 1-t^2\}}$ i $\mathbb{P}_2$ som uppfyller $T(1+t^2) = 3(1+t^2)$, $T(t) = 3t$, $T(1-t^2) = (-1)(1-t^2)$.

Matrisen $\boxed{[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$.

7. (i) Vi har $A^TA = I_n$ och $B^TB = I_n$. Då är $(AB)^T(AB) = (B^TA^T)(AB) =$

$= B^T \underbrace{(A^TA)}_{I_n} B = B^T I B = B^T B = I_n \Rightarrow AB$ är ortogonal.

$\det(A^TA) = \det I_n = 1 \iff \det A^T \cdot \det A = 1 \iff (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

(ii) $\|A\bar{x}\|^2 = A\bar{x} \cdot A\bar{x} = (A\bar{x})^T A\bar{x} = \bar{x}^T A^T A \bar{x} = \bar{x}^T I_n \bar{x} =$

$= \bar{x}^T\bar{x} = \bar{x}\cdot\bar{x} = \|\bar{x}\|^2 \Rightarrow \|A\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$.

(iii) $\det(A-I) = \det(A - A^TA) = \det((I-A^T)A) =$

$= \det(I-A^T) \underbrace{\det A}_{=1} = \det(I-A)^T = \det(I-A) = (-1)^3 \det(A-I) =$

$= -\det(A-I)$. Vi får $\det(A-I) = 0$.