Lösningar till Tentamen TMV141/MVE021

140825 kl. 8.30 – 12.30

① (a) Koordinaterna i bas B ges av lösningarna till följande system:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \quad 4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \end{array}\right] \tfrac{1}{2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \end{array}\right] 5 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right] \tfrac{1}{4} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3 = 6,\ x_2 + x_3 = 3,\ -x_1 - 2x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -3,\ x_1 = -14 \Rightarrow \boxed{[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} -14 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}}$

(b) $\det(ABA^{-1}) = \det A \cdot \det B \cdot (\det A)^{-1} = \det B = 1 \cdot 3 \cdot 6 = \boxed{18}$

(c) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -1 \quad -2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 pivotkolonner $\Rightarrow \boxed{\dim Col(A) = 2}$ och en bas är $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$

Nul(A): $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sätt $x_3 = t,\ x_4 = s \Rightarrow x_2 = 3t - s$ och $x_1 = -5t + 2s$.

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -5t + 2s \\ 3t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ t, s \in \mathbb{R} \Rightarrow Nul(A)$ spänns upp av $\boxed{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ som är också l. oberoende, alltså bas.

(d) $T(1,1) = (3,2),\ T(1,-1) = (5,0) \Rightarrow T(2,0) = T(1,1) + T(1,-1) = (3,2) + (5,0) = (8,2)$

$\Rightarrow T(1,0) = \frac{1}{2} T(2,0) = (4,1) \Rightarrow T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) = (-1,1)$. Matrisen är följande: $\boxed{A = [T(\bar{e}_1)\ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$.

$T(2,1) = T(1,1) + T(1,0) = (3,2) + (4,1) = (7,3)$ (eller $T(2,1) = A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$).

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},\ \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix};\ A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 87 \end{bmatrix}$.

Den normaliserade ekvationen $A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}$ har lösningen $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,5 \end{bmatrix}$.

Den sökta linjen är alltså $\boxed{y = 0,3 + 1,5x}$.

② (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Sätt $x_3 = t$, $x_4 = s \Rightarrow x_2 = t$, $x_1 = -t-s \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ där $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, som är också linjärt oberoende

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ är en bas till W.

Ortogonalisering proceduren: $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$, $\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. En ortogonal bas är $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(ii) Vektorn som har minsta avstånd till $(3,-2,0,3)$ är projektionen på W.

$\text{proj}_W \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1} \bar{u}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2} \bar{u}_2 = -\frac{5}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{avst}(\bar{v}, W) = \|\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v}\| = \sqrt{3 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3}$.

③ (i) $I - A^2 = (I-A)(I+A) \Rightarrow \det(I-A^2) = \det(I-A)\det(I+A)$

Om $I - A^2$ inverterbar $\Rightarrow$ ~~det~~ $(I-A^2) \neq 0 \Rightarrow \det(I+A) \neq 0 \Rightarrow I + A$ inverterbar.

(ii) $X + A^2(I-X) = A + I \iff X + A^2 - A^2X = A + I \iff (I - A^2)X = A - A^2 + I$

$I - A^2 = I - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ inverterbar ty $\det(I - A^2) = 9 \neq 0$.

Vi får $X = (I-A^2)^{-1}(A - A^2 + I) = (I - A^2)^{-1}A + I$.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

④. (i) Om A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, P inverterbar och D diagonal

$\Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ och D^{-1} är diagonal,

ty om $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$. Alltså är A^{-1} diagonaliserb

(ii) Låt oss diagonalisera A.

$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{7}{4} - \lambda\right)\left(-\frac{2}{4} - \lambda\right) + \frac{18}{16} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$ egenvärdena.

Motsvarande egenrummen:

$\lambda_1 = 1:\ (A - I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3/4 & -6/4 \\ 3/4 & -6/4 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = \frac{1}{4}:\ (A - \frac{1}{4} I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 3/4 & -3/4 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$.

Vi får $A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} A^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} A^k = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5). En uppsättning vektorer $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ i ett vektorrum V kallas en bas om vektorerna är linjärt oberoende och spänner upp V.

Låt $W = \operatorname{span}\{\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k, \bar{v}_k - \bar{v}_1\}$. Eftersom

$\bar{v}_k - \bar{v}_1 = -\left((\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (\bar{v}_2 - \bar{v}_3) + \ldots + \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k\right)$, kan man exkludera $\bar{v}_k - \bar{v}_1$

och man får $W = \operatorname{span}\{\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k\}$.

Låt oss bevisa att $\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k$ är linjärt oberoende.

Antag att $\lambda_1(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + \lambda_2(\bar{v}_2 - \bar{v}_3) + \ldots + \lambda_{k-1}(\bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k) = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{v}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\bar{v}_3 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})\bar{v}_{k-1} - \lambda_{k-1}\bar{v}_k = \bar{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_1,\ \lambda_3 = \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1} = \lambda_{k-2},\ \lambda_{k-1} = 0$, eftersom $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ l. oberoende. Alltså får man $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$.

Då blir $\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k$ en bas och $\dim W = k-1$.

ii) Låt $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_2$. Vi vet att $\mathbb{P}_2$ isomorf med $\mathbb{R}^3$.

Koordinatvektorerna till q_1, q_2, q_3 är respektive $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

q_1, q_2, q_3 är ej bas till P_2 omm q_1, q_2, q_3 linjärt beroende
Ekvivalent, omm deras koordinatvektorer i $\mathbb{R}^3$ är l. beroende.

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff a^2-3a-4=0 \iff a=-1 \text{ eller } 4.$$

(6). T är linjär : 1) $T((p_1+p_2)(t)) = t(p_1+p_2)'(t) + (p_1+p_2)(t+1) =$

$= tp_1'(t) + tp_2'(t) + p_1(t+1) + p_2(t+1) = T(p_1(t)) + T(p_2(t))$.

2) $T((\lambda p)(t)) = t(\lambda p)'(t) + (\lambda p)(t+1) =$

$= t\lambda p'(t) + \lambda p(t+1) = \lambda\, tp'(t) + p(t+1) = \lambda T(p(t))$

Matrisen till T relativt standardbasen $1, t, t^2$ är :

$M = [[T(1)]_{\mathcal{E}}\ [T(t)]_{\mathcal{E}}\ [T(t^2)]_{\mathcal{E}}]$

$T(1) = 1$, $T(t) = t + t+1 = 2t+1$, $T(t^2) = 2t^2 + (t+1)^2 = 3t^2+2t+1$.

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Låt oss diagonalisera M. Egenvärdena är $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$

Motsvarande egenvektorer :

$\lambda_1 = 1$: $(A-I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \bar{x} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $(A-2I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{x} = 0 \iff \bar{x} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 3$: $(A-3I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \bar{x} = t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

En bas av egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, som motsvarar $1,\ 1+t,\ 3+4t+2t^2$

Matrisen till T relativt denna bas är just $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ty $M = P_B D P_B^{-1}$

<u>Svar</u>: $B = \{1,\ 1+t,\ 3+4t+2t^2\}$.

(7). (i) Låt $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ vara bas till $\mathbb{R}^n$. Eftersom T injektiv, har ekv. $T(\bar{x}) = \bar{0}$ bara trivial lösning. Vektorerna $T(\bar{e}_1), \ldots, T(\bar{e}_n)$ är l. oberoende ty om $x_1T(\bar{e}_1) + \cdots + x_nT(\bar{e}_n) = \bar{0} \iff T(x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n) = \bar{0} \iff$

$x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n = \bar{0} \iff x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Antag att $n > m$. Då har man n linj. oberoende vektorer i $\mathbb{R}^m$: $T(\bar{e}_1), \ldots, T(\bar{e}_n)$. Vi får en motsägelse! Då måste $n \le m$.

(ii) Vi har $\mathrm{Nul}(AB) \supseteq \mathrm{Nul}(B)$ eftersom om $\bar{x} \in \mathrm{Nul}(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow B\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow AB\bar{x} = A\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} \in \mathrm{Nul}(AB)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Då är } \dim \mathrm{Nul}(B) \leq \dim \mathrm{Nul}(AB). \\ \text{Men } \dim \mathrm{Nul}(B) = p - \mathrm{rang}(B) \\ \quad\;\; \dim \mathrm{Nul}(AB) = p - \mathrm{rang}(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} p - \mathrm{rang}(B) \leq p - \mathrm{rang}(AB) \\ \Downarrow \\ \mathrm{rang}(B) \geq \mathrm{rang}(AB). \end{array}$$

$\mathrm{rang}(AB) = \mathrm{rang}((AB)^T) = \mathrm{rang}(B^T A^T) \leq \mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A)$.