MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2015-04-16

Tentamen

Lösningsförslag MVE021 Linjär algebra I

Del 1: Godkäntdelen

1. (a)

$$\Leftrightarrow (2I - A)X = B \Leftrightarrow X = (2I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) För HL $= t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och speciellt för $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ finns ∞ med lösningar. Med första variabeln som som fri blir dessa

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{R}$$

För andra HL finns inga lösningar.

(c) $\det A = 0$.

(d)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(e)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim \mathcal{R}_A = \dim \mathcal{K}_A = 2, \; \dim \mathcal{N}_A = 5 - 2 = 3.$$

En bas för radrummet är $\mathbf{e}_1 = [1\ 1\ 0\ 3\ 0]^T$ och $\mathbf{e}_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ -1]^T$.

2. Givet matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Inversen till AB är

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Givet matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm egenvärdena till matrisen. **Svar:** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

(b) Är matrisen A diagonaliserbar? Uträkningar behövs inte. Det räcker att motivera! **Svar:** Ja. Tre distinkta egenvärden ger tre linjärt oberoende egenvektorer. Således finns en bas av egenvektorer och matrisen kan därför diagonaliseras.

4. Betrakta mängden U av de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, som uppfyller $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

(a) Visa att U är ett underrum till $\mathbb{R}^3$ och bestäm en ortogonal bas till U.

Lösning: Om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ båda ligger i U och $c, d \in \mathbb{R}$ så är $c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \in U$ ty $(cx_1+dy_1)-(cx_2+dy_2)+(cx_3+dy_3) = c(x_1-x_2+x_3)+d(y_1-y_2+y_3) = c\cdot 0+d\cdot 0 = 0$. Man kan också se $U = \mathrm{Nul}(A)$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Använder man x_2 och x_3 som fria variabler får man att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ med $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en bas för U.

Basen är inte ortogonal men Gram-Schmidt ger $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en ortogonal bas för U.

(b) Bestäm den vinkelräta projektionen av $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ på underrummet U.

Lösning: $\mathrm{Proj}_U \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \dfrac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Överbetygsdelen

5. (a) Förklara varför kolonnerna i matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Lösning: Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har oändligt många lösningar på grund av att vi får mist två fria variabler. Varje icke trivial lösning ger en linjär relation mellan kollonnerna som talar om att kolonnerna är linjärt beroende.

(b) Argumentera/bevisa att för n vektorer $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, 2, \ldots, n$ med $m < n$, är vektorerna linjärt beroende.

Lösning: Låt $A = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n]$. Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har då oändligt många lösningar på grund av att vi får mist $n - m$ fria variabler.

6. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ är given.

(a) Egenvärden är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ och egenvektorer till A är $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) Lös följande system av differentialekvationer.

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) & + & 3x_1(t) + 4x_2(t) = 0 \end{array} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 100 \\ x_2(0) = 150 \end{cases}$$

Allmänna lösningen är $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -2C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} \\ 3C_1e^{-t} - C_2e^{-2t} \end{bmatrix}$. Begynnelsevärdena ger $-2C_1 + C_2 = 100$, $3C_1 - C_2 = 150$, dvs $C_1 = 250$, $C_2 = 600$. Lösningen blir $x_1(t) = -500e^{-t} + 600e^{-2t}, x_2(t) = 750e^{-t} - 600e^{-2t}$.

7. Givet en kvadratisk matris A av typ $n \times n$. Bevisa att följande påståenden är ekvivalenta.

(a) A^{-1} existerar.

(b) $\det A \neq 0$.

(c) rang $A = n$.

(d) Matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig lösning $\mathbf{x}$.