Lösningsförslag till tentamen för I-programmet i Linjär algebra, MVE021, 20150604, 08.30-12.30

1. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Determinanten av $\boldsymbol{A}$:

$$|\boldsymbol{A}| = \{R1\} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot ((-1)\cdot(-2) - 1 \cdot 3) = 1.$$

   (b) Inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3p, 3p

2. Givet matriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Antag att de är kvadratiska av samma ordning med $\det \boldsymbol{C} = 14$ och $\det \boldsymbol{B} = 2$.

   (a) Determinanten av $\boldsymbol{A} = \dfrac{\det \boldsymbol{C}}{\det \boldsymbol{B}} = \dfrac{14}{2} = 7$ och determinanten av $\boldsymbol{B}^{-1} = (\det \boldsymbol{B})^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

   (b)

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}^{-1}.$$

3p, 4p

3. (a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Rangen = 2 och är dimensionen på matrisens radrum. Dimensionen för nollrummet är $4 - 2 = 2$.

   (b) En bas för radrummet är ex.vis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. En bas för nollrummet, som har dimensionen $4 - 2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & = -6x_3 + 2x_4 \\ x_2 & = 8x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

   Det ger att

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -6x_3 + 2x_4 \\ 8x_3 - 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \boldsymbol{u} + x_4 \boldsymbol{v}$$

   så att vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är en bas för nollrummet $\mathcal{N}_{\boldsymbol{A}}$.

   (c) $LU-$faktoriseringen av $\boldsymbol{A}$: Vi gör de nödvändiga radoperationerna med de elementära matriserna

$$\boldsymbol{E}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{E}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \boldsymbol{U}.$$

   Matrisen $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{E}_1^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2p, 5p, 2p

4. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   som visar att rang för koefficient- och totalmatris är olika. så att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$.

   (b) Approximativt med minsta kvadratmetoden:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ med determinant } 5 \neq 0$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(c) Medelfelet: Felvektorn är

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ med medelfelet } \eta = \frac{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1p, 4p, 2p

5. Betrakta följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ 2x_1(t) + 3x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}.$$

(a) Som matrisekvation $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Vi försöker diagonalisera matrisen $\boldsymbol{A}$. Egenvärden och egenvektorer:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \text{ och } \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Genom att sätta $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y}$ övergår problemet i $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$, som blir

$$\begin{cases} 4\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_1' \\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_2' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = C_1 e^{4t} \\ \boldsymbol{y}_2 = C_2 e^{t} \end{cases} \quad \text{som ger } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a\,e^t + b\,e^{4t} \\ -a\,e^t + 2b\,e^{4t} \end{bmatrix}$$

(b) Lösningen som uppfyller villkoren att $x_1(0) = 3$ och $x_2(0) = 0$:

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 1 = -a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2e^t + e^{4t} \\ x_2(t) &= -2e^t + 2e^{4t} \end{aligned}$$

5p, 2p

6. Givet den kvadratiska formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3.$$

(a) Visa att den kvadratiska formen är positivt definit... Vi kan skriva

$$Q = \boldsymbol{x}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} \text{ med } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ med sek. ekv. } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)((\lambda-3)^2 - 1)(1-\lambda)(3-\lambda)^2 + (\lambda - 1^2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \text{ med egenvärden } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

och eftersom de är positiva är den kvadratiska formen positivt definit.

(b) En beskrivning av andragradsytan $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$: En ellipsoid med medelpunkt i $(0, 0, 0)$ och halvaxlar $a = 1$, $b = 1\sqrt{2}$, $c = 1/2$.

4p, 1p

7. (a) Att $\boldsymbol{v}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$ är linjärt beroende betyder att det finns reella tal c_k, $k = 1, 2, 3, 4$, inte alla $= 0$, så att

$$\sum_{k=1}^{4} c_k\,\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

(alternativt att en av vektorerna kan uttryckas som en linjärkombination av de övriga)
Vi bildar matrisen med dessa vektorer som rader.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och eftersom rangen $\operatorname{rang}\boldsymbol{A} = 3 < 4$ är de linjärt beroende.

(b) Definiera begreppet transponatmatris och bevisa att...
Transponatet till en matris $\boldsymbol{A}$ av typ $m\times n$ är matrisen $\boldsymbol{A}^T$ av typ $n\times m$ med elementet a_{jk} i $\boldsymbol{A}$ i position (k, j).
Tag elementet i position (k, j) i VL:s matris. Detta element är element i position (j, k) i $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ och alltså produkten av rad j i $\boldsymbol{A}$ och kolonn k i $\boldsymbol{B}$.
Tag element i position (k, j) i HL:S matrisprodukt. Det är produkten av rad k i $\boldsymbol{B}^T$ och kolonn j i $\boldsymbol{A}^T$, alltså produkten av rad j i $\boldsymbol{A}$ och kolonn k i $\boldsymbol{B}$. Alltså är elementen i position (k, j) lika i båda leden. $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T$ för matriser av lämpliga typer.

4p, 5p