

## Lösningförslag MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkänddelen). Bonuspoäng från Maple T. A. räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

## Del 1: Godkänddelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Lös ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  i minsta kvadratmening då  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  och  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . (3p)

**Lösning:** Minsta kvadrat lösningen  $\hat{\mathbf{x}}$  löser normalekvationerna  $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$ . Vi får  $A^T A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\det(A^T A) = 24$ ,  $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ .

Minsta kvadrat lösningen blir  $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}$ .

- (b) Hur stort blev minsta kvadrat felet? (2p)

**Lösning:**  $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Minsta kvadrat felet blir

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \sqrt{\frac{(-5)^2 + 3^2 + (-7)^2 + (-1)^2}{36}} = \sqrt{\frac{84}{36}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

- (c) Kontrollera att felvektorn  $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$  är ortogonal mot kolonnerna i  $A$  om  $\hat{\mathbf{x}}$  är minsta kvadratlösningen. (2p)

**Lösning:**  $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{10 + 3 - 14 + 1}{6} = 0$  och  $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-5 + 0 + 7 - 2}{6} = 0$ . Det är detta som är innebörden av normal ekvationerna.

3. (a) Bestäm en bas för kolonnrummet till matrisen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & 8 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ . (2p)

Radreduktion ger

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså är första, andra och fjärde kolonnen pivot-kolonner. Motsvarande kolonner i  $A$ ,  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$  utgör således en bas för  $\text{Col}(A)$ .

$$\text{Svar: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \text{ utgör en bas för } \text{Col}(A).$$

(b) Bestäm dimensionen för kolonnrummet respektive nollrummet för matrisen  $A$ . (1p)

**Svar:**  $\dim \text{Col}(A) = 3$  enligt (a) och  $\dim \text{Nul}(A) = n - \dim \text{Col}(A) = 1$  (antal fria variabler).

(c) Bestäm en ortogonal bas för kolonnrummet till matrisen  $A$ . (3p)

Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess ger  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_2 -$

$$\frac{20}{20} \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_4 - \frac{\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_4 - \frac{40}{20} \mathbf{u}_1 - \frac{3}{2} \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Svar: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\} \text{ utgör en ortogonal bas för } \text{Col}(A).$$

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 6x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren  $x_1(0) = 4$ ,  $x_2(0) = 3$ .

**Lösning:** Med  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  och  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  blir systemet  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ . (5p)

Diagonalisera  $A$ . Karakteristiska polynomet är  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 2\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$ , så egenvärdena blir  $\lambda_1 = 5$  och  $\lambda_2 = -2$ . Egenvektorer till  $\lambda_1$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till  $\lambda_2$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger  $A = PDP^{-1}$  med  $P = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  och  $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

Låt  $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ . Då får vi  $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$ , dvs  $\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) \end{cases}$ .

De allmänna lösningarna är  $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{5t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-2t} \end{cases}$ .

Begynnelsevillkoren  $P\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  ger

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Dvs  $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  så  $C_1 = 1$  och  $C_2 = 2$ . Det ursprungliga systemets lösning blir  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$

$$P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 6e^{5t} - 2e^{-2t} \\ e^{5t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

VÄND!

## Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar med bevis, motexempel eller hänvisning till sats. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

- (a) Om  $A$  är  $m \times n$  matris och  $C$  är  $n \times m$  matris så att  $CA = I_n$  så har ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  endast trivial lösning. (1p)

**Svar:** Sant, ty om  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  får vi  $\mathbf{0} = CA\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

- (b) Om  $A \sim B$  är radekvivalenta  $n \times n$  matriser, så har  $A$  och  $B$  samma egenvärden. (1p)

**Svar:** Falskt. Med  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , får vi  $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2)$ , men  $\det(B - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1)$ , så egenvärdena är olika.

- (c) Om  $A$  och  $B$  är  $n \times n$  matriser med  $n \geq 2$  så är  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ . (1p)

**Svar:** Falskt. Med  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  och  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , får vi  $\det(A) = \det(B) = 0$ , men  $\det(A + B) = \det(I) = 1$ .

- (d) Matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 9 \\ 7 & 0 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar. (1p)

**Svar:** Sant. Matrisen är symmetrisk så spektralsatsen ger att den är diagonaliserbar.

6. Låt  $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4\}$  vara en ortogonal mängd i  $\mathbb{R}^5$ . Antag dessutom att ingen av vektorerna i  $S$  är nollvektorn. Bevisa att  $S$  är en linjärt oberoende mängd. (6p)

**Lösning:** Se beviset av Sats 6.2.4 i Lay.

7. Låt  $Q$  vara den kvadratiske formen  $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$ .

- (a) Förklara vad som menas med att en kvadratisk form är positivt definit. (1p)

**Svar:** En kvadratisk form  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  är positivt definit ifall  $Q(\mathbf{x}) > 0$  för alla  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

- (b) Avgör om  $Q$  är positivt definit, negativt definit, eller indefinit. (3p)

**Lösning:** Den kvadratiske formen kan skrivas  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , med  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ .

Beräkna egenvärden:  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$

$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 24) = (3 - \lambda)^2(8 - \lambda)$ . Vi får egenvärden  $\lambda_1 = 3$  med multiplicitet 2 och  $\lambda_2 = 8$  med multiplicitet 1. Alla egenvärdena är positiva, så  $Q$  är positivt definit.

- (c) Bestäm nya variabler  $y_1, y_2, y_3$  så att  $Q$  uttryckt i de nya variablerna saknar korsstermer, och uttryck de nya variablerna i de gamla. (4p)

**Lösning:** Vi behöver diagonalisera  $A$ . Egenvektorer till  $\lambda_1$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Egenvektorer } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer till  $\lambda_2$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalisering ger ON-bas bestående av vektorerna  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{u}_3 =$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_3$ . Med  $P = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3]$  och  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$  får vi  $A = PDP^T$  och  $P^{-1} = P^T$ .

Låt  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$ . Då får vi  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  och  $Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T P^T A P \mathbf{y} = \mathbf{y}^T P^T P D P^T P \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_3^2$ . Relationen  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$  ger  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + x_3)$ ,  $y_2 = x_2$  och  $y_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2x_3)$ .

Hoppas det gick bra!  
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	Lösningförslag MVE021 Linjär algebra I 2016-06-02	sid.nummer 1	Poäng
------------	---	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet 
$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 7 \end{cases}.$$
 (3p)

**Lösning:**

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

**Svar:**  $x = 2, y = -1, z = 3$ .

- (b) Låt  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en linjär avbildning i planet som avbildar punkten  $(1, 1)$  på  $(2, 1)$  och avbildar punkten  $(0, 2)$  på punkten  $(4, -2)$ . Bestäm standardmatrisen för avbildningen  $T$ . (2p)

**Lösning:**  $T$  är linjär så  $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$  och  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ . Vi får  $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  och  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

**Svar:**  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (c) Lös matrisekvationen  $X = B + AX$  då  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  och  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . (3p)

**Lösning:**  $X = B + AX \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow (I - A)X = B \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1}B$  om  $(I - A)^{-1}$  existerar.  $I - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\det(I - A) = 1$ ,  $(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

$$X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Svar:**  $X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (d) Beräkna determinanten  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ . (3p)

**Lösning:** Utveckla efter första raden och sedan efter tredje raden.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(2 - 0) = -4.$$

**Svar:**  $-4$

- (e) För vilket värde på  $a$  är vektorerna  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \right\}$  linjärt beroende? (3p)

**Lösning:** Låt  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ .  $A$  är kvadratisk, så kolumnerna är linjärt

beroende  $\Leftrightarrow A$  ej inverterbar  $\Leftrightarrow 0 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$

$$a \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(-4 - 1) + a(1 - 4) = -3(a + 5).$$

**Svar:** Vektorerna är linjärt beroende omm  $a = -5$ .