MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-08-22 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Olof Giselsson
ankn 5325

MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T.A. från 2016 räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (12p)

2. Låt W vara nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm dimensionen för nollrummet och kolonnrummet till matrisen A. (1p)
Lösning: Radreduktion

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 5 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 5 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -5 & -15 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

ger 3 fria variabler och 2 pivot kolonner, så dimensionerna för nollrummet och kolonnrummet är 3 respektive 2.

(b) Bestäm en bas för W. (2p)
Lösning: Den allmänna lösningen till systemet ovan kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} \frac{x_4}{2} + \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_3} \frac{x_5}{2}.$$

Då vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är linjärt oberoede och spänner upp W utgör de en bas för W.

(c) Bestäm en ortogonal bas för W. (3p)
Lösning: Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess ger $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2$. Vi får

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en ortogonal bas för W.

(d) Skriv vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ som $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|} + \mathbf{u}_{\perp}$ där $\mathbf{u}_{\|} \in W$ och $\mathbf{u}_{\perp} \in W^{\perp}$. (2p)

Lösning:

$$\mathbf{u}_{\|} = \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. (a) Förklara vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)
Svar: Definitionsmässigt är $\hat{\mathbf{x}}$ mistakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ för alla vektorer $\mathbf{x}$. Dvs. den vektor som minimerar felet $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden $y = a + bt$ till följande mätdata (4p)

t	-1	0	2	3
y	0	2	3	2

.

Lösning: Designmatrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, mätdata $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och parametervektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Svar: $a = 5/4$ och $b = 1/2$, alltså $y = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t$ minimerar minstakvadratfelet.

(c) Hur stort blev approximationsfelet vid $t = 2$? (1p)
Lösning: Vid $t = 2$ ger approximationen $y = 9/4$ istället för mätvärdet $y = 3$. Felet blir således $3/4$.

4. (a) Lös följande system av differentialekvationer (5p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 4x_1(t) & + & 5x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & - & 2x_2(t) \end{cases}$$

Lösning: Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$.
Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till λ_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 3y_2(t) \end{cases}$.
De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} \\ y_2(t) = C_2 e^{3t} \end{cases}$.
Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{3t} \\ C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

(b) Är origo en källa (source), sänka (sink), sadelpunkt eller spiralpunkt? (1p)
Svar: Origo är en sadelpunkt ty systemet har både positiva och negativa reella egenvärden.

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar med bevis, motexempel eller hänvisning till sats. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en diagonaliserbar $n \times n$ matris så är A inverterbar. (1p)
Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonal, men ej inverterbar ty $\det(A) = 0$.

(b) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till matrisen A, så är $\mathbf{v}$ egenvektor till A^k för alla heltal $k \geq 0$. (1p)
Svar: Sant. Om $\mathbf{v}$ är egenvektor till A med egenvärde λ så är $A^k\mathbf{v} = A^{k-1}A\mathbf{v} = \lambda A^{k-1}\mathbf{v} = \cdots = \lambda^k\mathbf{v}$, så $\mathbf{v}$ är egenvektor till A^k med egenvärde λ^k.

(c) Om U är en kvadratisk matris och $U^T U = I$, då är $\det(U) = \pm 1$. (1p)
Svar: Sant. $1 = \det(I) = \det(U^T U) = \det(U^T)\det U = (\det U)^2$, så $\det(U) = \pm 1$.

(d) Om A är en 2×3 matris och avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är surjektiv, så är T injektiv. (1p)
Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ger surjektiv avbildning, men $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{0}$, så avbildningen är inte injektiv.

(e) Om A och B är matriser sådana att $AB = 0$, då måste $A = 0$ eller $B = 0$. (1p)
Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ger $AB = 0$.

6. Låt U vara en $m \times n$ matris med ortonormala kolonner. Bevisa att $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ och $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. (6p)

Lösning: Låt $U = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n]$, då är

$$U^T U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = I_n,$$

ty $\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_l$ är 0 om $k \neq l$ och 1 om $k = l$.
$(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = (U\mathbf{x})^T U\mathbf{y} = \mathbf{x}^T U^T U \mathbf{y} = \mathbf{x}^T I \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ vilket bevisar första påståendet. Detta med valet $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ger $\|U\mathbf{x}\|^2 = (U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$ som ger det andra påståendet.

7. (a) Bestäm en ortogonal diagonalisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. (5p)

Lösning: Det karakteristiska polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda - 3)^2$$

ger egenvärden $\lambda_1 = 0$ med multipicitet 1 och $\lambda_2 = 3$ med multiplicitet 2.
Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till λ_2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

För att få en ortogonal diagonalisering behöver vi en ON-bas av egenvektorer. $\mathbf{v}_1$ är automatiskt ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ på grund av olika egenvärden, men $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är inte ortogonala. Därför kan vi ersätta $\mathbf{v}_3$ med $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Normalisera

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{|\mathbf{v}_3'|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Detta ger en ortogonal faktorisering $A = PDP^T$ med $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}$

och $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Beräkna A^k för alla heltal $k \geq 1$. (2p)
Lösning: $A^k = (PDP^T)^k = PDP^T PDP^T \dots PDP^T = PDD \dots DP^T = PD^k P^T$ på grund av att $P^T P = I$. Vi får

$$A^k = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix} P^T = 3^{k-1} P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^T = 3^{k-1} A = 3^{k-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 2016-08-22	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Svar: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen med $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $T(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. (3p)

Lösning: $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + 2T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $-T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger $3T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $3T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ så $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Svar: Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) & T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Lös matrisekvationen $A^TAX - B = X$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: $A^TAX - B = X \Leftrightarrow A^TAX - X = B \Leftrightarrow (A^TA - I)X = B \Leftrightarrow X = (A^TA - I)^{-1}B$ om $A^TA - I$ är inverterbar. $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\det(A^TA - I) = -1$ och $(A^TA - I)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $X = (A^TA - I)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) För vilket värde på a ligger vektorerna $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \}$ i samma plan? (3p)

Lösning: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6 - 3a$.

Svar: Då $a = 2$ är vektorerna linjärt beroende och ligger då i samma plan.