MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-10-08 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
ankn 5325

Lösningsförslag **MVE021 Linjär algebra I**

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T.A. från 2016 räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (12p)

2. Låt $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm med hjälp av diagonalisering A^k då $k \to \infty$. (5p)

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{4})$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1/4$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor till $\lambda_2 = 1/4$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.
Vi får $\det(P) = 3$ och $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
$A^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PDD\cdots DP^{-1} = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{-k} \end{bmatrix}P^{-1}$.
Så $\lim_{k\to\infty} A^k = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Låt $W = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm dimensionen för W. (1p)
Lösning:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har 3 pivot element så $\dim(W) = 3$.

(b) Ange n stycken linjärt oberoende vektorer i W, där n är svaret på (a) uppgiften. (2p)
Lösning: Första, andra och fjärde kolonnen är pivot kolonner, så vi får 3 linjärt oberoende vektorer $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Bestäm en ortogonal $\mathcal{B}$ bas för W. (3p)
Lösning: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ utgör en bas. Vi kan konstruera en ortogonal bas med Gram–Schmidts ortogonaliseringsprocess. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Svar: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en ortogonal bas för W.

(d) Skriv ortogonalprojektionen $\mathbf{u}_{\|}$ av $\mathbf{u}$ på W i basen $\mathcal{B}$, dvs. $[\mathbf{u}_{\|}]_{\mathcal{B}}$. (2p)

Lösning: $\mathbf{u}_{\|} = \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \dfrac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, så $[\mathbf{u}_{\|}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Låt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. (1p)
Lösning:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sista raden ger $0 = 1$, så systemet är inkonsistent.

(b) Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4p)
Lösning: Minstakvadratlösningen löser normalekvationerna $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi har $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$. $\det(A^T A) = 2$ så $(A^T A)^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.
Detta ger minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$.

(c) Vad blev minstakvadratfelet. (2p)

Lösning: Minstakvadratfelet är $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \| \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 0 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar med bevis, motexempel eller hänvisning till sats. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en $n \times n$ matris, med egenvärde λ så är avbildningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som ges av $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x}$ injektiv (one-to-one). (1p)
Svar: Falskt. Om $\mathbf{v}$ är egenvektor med egenvärde λ, så blir $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} - A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, men $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så T är inte injektiv.

(b) Om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är 3λ egenvärde till matrisen $3A$. (1p)
Svar: Sant. Om $\mathbf{v}$ är egenvektor med egenvärde λ, så blir $(3A)\mathbf{v} = 3\lambda\mathbf{v}$, dvs 3λ är egenvärde till matrisen $3A$.

(c) Avbildningen $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3 + 1, -x_1 - 2)$ är linjär. (1p)
Svar: Falskt. $T(0,0,0) = (0,1,-2) \neq \mathbf{0}$ så T är inte linjär.

(d) Om A är en $n \times (n+1)$ matris så är $\dim(\text{Nul}(A)) = 1$. (1p)
Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$.

(e) Om $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en vridning kring en axel $\mathbf{v}$ så är T surjektiv (onto). (1p)
Svar: Sant. Om T är en vridning med vinkel θ kring $\mathbf{v}$, så är en vridning med vinkel $-\theta$ kring $\mathbf{v}$ invers till T. Så T är inverterbar och satsen om inverterbara matriser ger då att den är surjektiv.

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Bevisa att $(\text{Col}\, A)^\perp = \text{Nul}\, A^T$. (5p)
Lösning: Se sats 6.1.3 på sid 353.

7. Låt Q vara den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2)$.

(a) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, eller indefinit. (3p)
Lösning: Vi kan skriva $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, med $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.
Den karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$
$= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 1$ med multiplicitet 2. Egenvärdena har olika tecken, så Q är indefinit.

(b) Bestäm nya variabler y_1, y_2, y_3 så att Q uttryckt i de nya variablerna saknar korstermer, och uttryck de nya variablerna y_1, y_2, y_3 i variablerna x_1, x_2, x_3. (5p)
Lösning: Egenvektorer till $\lambda_1 = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = 1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}_1$ är automatiskt ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$, men $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är inte ortogonala. Därför behöver vi ortogonalisera. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Efter normalisering får vi $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Tillsammans med $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ får vi en ortogonal diagonalisering $A = PDP^T$. Låt $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$. Då får vi $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ och $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T P^T PDP^T P\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Relationen $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$ ger $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2)$ och $y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 - x_2 + 2x_3)$.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 2016-10-08	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en LU-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{②+2① \\ ③-①}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \end{bmatrix} \underset{③+3②}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Vektorerna $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ utgör en bas $\mathcal{B}$. Låt $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v}$ relativt basen $\mathcal{B}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 9 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Svar: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Låt A och B vara matriser så att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Beräkna $(AB)^{-1}$. (3p)

Svar: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning: Utveckla efter andra kolonnen och sedan efter tredje kolonnen $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$$-3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(2-(-2)) = -12.$$

Svar: -12.