Lösningar till MVE021 Linjär algebra för I1 17-06-01

1. (a) Vi har

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3+10+0+2 \\ -6+5+16+0 \\ 6+0-8h+2 \\ 6-20+24-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 8-8h \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att $\lambda = 3$ och att vi därför ska ha $8 - 8h = -24$.

Svar: $h = 4$.

(b) Låt $\mathcal{B}$ beteckna basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Om vi sätter $A = (\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$ och låter $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}}$ beteckna koordinaterna för $\mathbf{b}$ relativt basen $\mathcal{B}$ gäller att $A[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{b}$, så att sökta vektorn $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}}$ löser ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ekvationens utökade koefficientmatris utsätts för radoperationenrn till trappstegsform:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 11 \\ 3 & 3 & 21 \\ -2 & -2 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{TF.}$$

Lösning av detta ger $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svar: $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Om vi sätter $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$, så är vektorerna beroende precis när $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, har en lösning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -6 & 17 & 2+h \\ -3 & 9 & h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 14+h \\ 0 & 0 & h+6 \end{pmatrix} \quad \text{TF oavsett värde på } h.$$

För linjärt beroende krävs att $h + 6 = 0$, så att systemet har en fri variabel.

Svar: $h = -6$.

(d) Eftersom matriserna A och B är triangulära gäller att deras determinanter är produkten av elementen längs huvuddiagonalen, så $\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot h = 2h$ och $\det(B) = 3 \cdot h \cdot h = 3h^2$. Enligt produktregeln för determinanter är därmed $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 6h^3$. Vi ska alltså ha $6h^3 = -48$, eller $h^3 = -8$, vilket ger $h = -2$.

Svar: $h = -2$.

(e) Vi bestämmer inversen till A med hjälp av Jacobis metod:

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -14 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -13 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -14 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -13/4 & 3/4 & 2/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -17/4 & 3/4 & 6/4 \\ 0 & 1 & 0 & -13/4 & 3/4 & 2/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Svar: $\begin{pmatrix} -17/4 & 3/4 & 6/4 \\ -13/4 & 3/4 & 2/4 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(f) Matrisen A är inverterbar precis när $\det(A) \neq 0$. Räkneregler för determinanter ger

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 2h-16 & 2+h & 3 \\ 3h-24 & 5+h & -1 \\ h-8 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2+h & 5 \\ 0 & -1+h & 2 \\ h-8 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{utveckling längs 1:a kolonnen}\} = \\
&= (h-8)\begin{vmatrix} -2+h & 5 \\ -1+h & 2 \end{vmatrix} = (h-8)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1+h & 2 \end{vmatrix} = (h-8)(1-3h).
\end{aligned}
$$

Svar: När h inte är nåt av talen 8 och 1/3.

2. Att $\mathbf{v}$ ligger i kolonnrummet till A betyder att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ska ha en lösning. Vi gör radoperationer på utökade koefficientmatrisen till TF och bestämmer samtidigt vilka kolonner i A som är pivotkolonner. Dessa utgör en bas för kolonnrummet. Vi har

$$
\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{v} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & -6 & -7 & -2 & -15 & 1-2h \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 9 & -2+h \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 & h \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 9-2h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6+h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4+h \end{array}\right),
$$

som är på TF oavsett värde på h. Vi ser att kolonnerna 1, 2 och 3 i A är pivotkolonner och därför utgör en bas för kolonnrummet. Vi har också att ekvationssystemt är lösbart precis när sista kolonnen inte är pivokolonn, vilket inträffar när $-4+h=0$.

(a) **Svar:** $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ är en bas för kolonnrummet.

(b) **Svar:** När $h = 4$.

3. Sätter vi $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ blir ekvationssystemtet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, där $A = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$.
Vi försöker diagonalisera A och bestämmer egen värden genom att lösa

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -18 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Egenvärdena är alltså -1 och 2. Vi söker bas för egenrummen till dessa. Vi har

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så t.ex är $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en bas för egenrummet till -1.

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så t.ex är $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en bas för egenrummet till 2.

Vi har att A är diagonaliserbar, så lösningsformel ger att $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{2t}\mathbf{v}_2$, där c_1 och c_2 ska bestämmas så att $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Detta ger

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

som ger $c_1 = -2$ och $c_2 = 4$.

Svar: $x_1(t) = -2e^{-t} + 4e^{2t}$ och $x_2(t) = 6e^{-t} - 8e^{2t}$.

4. Om vi sätter $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ kan varje vektor i linjära höljet till $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ skrivas $A\mathbf{x}$. För att den vektorn ska ha kortast avstånd till $\mathbf{y}$ ska det gälla att $A\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är vinkelrät mot kolonnrummet. Det inträffar när $A\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är vinkelrät mot så väl $\mathbf{v}_1$ som $\mathbf{v}_2$, vilket kan skrivas

$$A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \text{eller} \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}.$$

Vi har

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 17 & 34 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -8 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

Systemet $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$ har därför den utökade koefficentmatrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 17 & -9 \\ 17 & 34 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 17 & -8 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & -17 \end{array}\right).$$

Detta ger $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Den vektor i kolonnrummet till A som ligger närmast $\mathbf{y}$ är därför

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att kortaste avståndet mellan en vektor i kolonnrummet till A och $\mathbf{y}$ är

$$||y - A\mathbf{x}|| = || \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} || = || \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} || = \sqrt{25 + 16 + 4 + 4} = 7.$$

Svar: 7.

5. Med basen $\mathcal{B} = \{1,\, t,\, t^2\}$ för $\mathbb{P}_2$ ges matrisen för T relativt denna bas av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi undersöker därför om A är diagonaliserbar. Den karaktäristiska ekvationen är

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -8 & 5-\lambda & 0 \\ 5 & -7 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

Vi söker bas för egenrumet till 2 och har

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger att egenrummet till 2 har dimension 1. För egenvärdet 1 har vi

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att egenrummet har dimension 1. Från detta ser vi att $\mathbb{R}^3$, som har dimension 3, inte har en bas bestående av egenvektorer till A, som därför inte är diagonaliserbar. Eftersom A är matris för T följer det att $\mathbb{P}_2$ saknar bas sån att matrisen för T blir diagonal.

Svar: Någon sådan bas finns inte för $\mathbb{P}_2$.

6. (a) Rangsatsen ger att $7 = \dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Null}(A) = 3 + 2$, vilket inte stämmer.
Svar: Falskt.

(b) Vi vet att $\{\mathbf{v}_1,\, \dots,\, \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal uppsättning vektorer i $\mathbb{R}^n$. Eftersom vektorerna är linjärt oberoende kan de kompletteras till en bas $\{\mathbf{v}_1, \dots,\, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots \mathbf{v}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$.
Om vi använder Gram-Schmidts metod på denna får vi en ortogonalbas för $\mathbb{R}^n$. Eftersom vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_p$ är parvis ortogonala ändras de inte när metoden används. Detta ger att vi efter Gram-Schmidt får en ortogonalbas för $\mathbb{R}^n$ som är en utvdigning av $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$.
Svar: Det stämmer.

(c) Antag att $A^2 = A$ och att λ är ett egenvärde till A. Då gäller, för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Detta ger $A^2\mathbf{v} = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Samtidigt är $A^2\mathbf{v} = A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vi får därför att $(\lambda^2 - \lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, gäller därför $0 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, vilket ger $\lambda = 0$, eller $\lambda = 1$.
Svar: Det stämmer.