Lösningar till MVE021 Linjär algebra för I1 17-08-19

1. (a) Vektorer är ortogonala precis när deras skalärprodukt är 0. Vi har $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 8 - 5h - 2 + h^2 = h^2 - 5h + 6 = (h-2)(h-3)$.

   Svar: När $h = 2$ och när $h = 3$.

   (b) Låt $\mathcal{B}$ beteckna basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Om vi sätter $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ och låter $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}}$ beteckna koordinaterna för $\mathbf{b}$ relativt basen $\mathcal{B}$ gäller att $A[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{b}$, så att sökta vektorn $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}}$ löser ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ekvationens utökade koefficientmatris utsätts för radoperationern till trappstegsform:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{TF.}$$

   Lösning av detta ger $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Svar: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Matrisen är inverterbar precis när dess deteriminant $|A|$ är skild från 0. Vi har, med räkneregeler för determinanter, att

$$|A| = \begin{vmatrix} h & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & h & 0 \\ 2 & h & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 0 & 3 \\ 3 & 0 & h \\ 2 & h & 2 \end{vmatrix} = -h \begin{vmatrix} h & 3 \\ 3 & h \end{vmatrix} = -h(h^2 - 9) = -h(h-3)(h+3).$$

   Svar: Matrisen saknar invers när $h = 0$, och när $h = \pm 3$.

   (d) Om $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ gäller att de tre vektorerna är linjärt beroende precis när $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en lösning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Det är samma villkor som att A har en kolonn som inte är pivotkolonn. Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 13 \\ -3 & 3 & h \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 25 \\ 0 & -3 & h-8 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & h-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(TF oavsett värde på } h\text{).}$$

   Svar: $h = 3$.

   (e) Sätt $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$. En vektor $\mathbf{u}$ ligger då i ortogonala komplememntet till H precis när $A^T\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Det ger att $H^\perp$ är nollrummet till A^T, som vi nu bestämmer en bas för. Radoperationer ger

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen till detta är $x_4 = x_4$, $x_3 = x_3$, $x_2 = 0$, $x_1 = -2x_3 - 2x_4$, som ger basen $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. Vi bestämer nu en ortogonalbas med hjälp av Gram-Schmidts metod och har

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2} \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2/5 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Svar: (T.ex.) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T$.

(f) Vi bestämmer inversen till A med hjälp av Jacobis metod:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & | & I_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Svar: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

2. (a) Dimensionen av nollrummet är antalet kolonner i A som inte är pivotkolonner. För att avgöra vilka de är gör vi radoperationer till TF. Vi har

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 2h+6 & 1+3h & 2h-4 \\ 5 & -15-3h & -13-2h & 10-3h \\ 2 & -6 & h-7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2h+6 & 1+3h & 2h-4 \\ 1 & -3+h & -11+4h & 2+h \\ 0 & 2h & 4h-6 & 2h \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -3+h & -11+4h & 2+h \\ 0 & 4h & -21+11h & 4h \\ 0 & 2h & 4h-6 & 2h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3+h & -11+4h & 2+h \\ 0 & h & 2h-3 & h \\ 0 & 0 & -9+3h & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

När $h = 0$ är 1:a och 3:e kolonnerna pivotkolonnerna. När $h = 3$ är 1:a och 2:a kolonnerna pivotkolonnerna. För andra värden på h är 1:a, 2:a och 3:e kolonnerna pivotkolonnerna.

Svar: Dimensionen av nollrummet är 2 när $h = 0$ och när $h = 3$. För andra värden på h är dimensionen 1.

(b) Vi har att

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1+7h \\ -13+8h \\ h-7 \end{pmatrix}.$$

Inget värde på h gör högra ledet till nollvektorn.
Svar: Inga h.

3. Låt a_n vara antalet konsumenter som använder fabrikat A efter n månader, och b_n motsvarande för fabrikat B. Vi har $a_0 = a$ och $b_0 = b$. Uppgifgen är att beräkna a_n och b_n. Vi sätter $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}^T$.

Information i uppgiften ger att $\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n$, där

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 5/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Upprepad användning av detta samband ger att $\mathbf{x}_n = M^n\mathbf{x}_0$. Vi hoppas att M är diagonaliserbar och bestämmer därför egenvärden till M. De är lösningarna till $0 = \det(M - \lambda I)$ och vi har

$$\det(M - \lambda I) \quad = \quad \begin{vmatrix} 1/6 - \lambda & 1/3 \\ 5/6 & 2/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{6} = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{6}).$$

Detta ger egenvärdena $\lambda = 1$ och $\lambda = -1/6$. Vi söker baser för egenrummen till dessa egenvärden. Vi har

$$M - I \quad = \quad \begin{pmatrix} -5/6 & 1/3 \\ 5/6 & -1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}^T$ är en bas för egenrummet till $\lambda = 1$.

Vi har

$$M + \frac{1}{6}I \quad = \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & 5/6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ är en bas för egenrummet till $\lambda = -1/6$.

Eftersom $\mathbb{R}^2$ har basen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ som består av egenvektorer till M är M diagonaliserbar och $M = PDP^{-1}$, där

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 + 5(-1/6)^n & 2 - 2(-1/6)^n \\ 5 - 5(-1/6)^n & 5 + 2(-1/6)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} (2/7 - (5/7)(-1/6)^n)a + (2/7 - (2/7)(-1/6)^n)b \\ (5/7 + (5/7)(-1/6)^n)a + (5/7 + (2/7)(-1/6)^n)b \end{pmatrix}.$$

Svar: Efter n månader använder $(2 - 5(-1/6)^n)a/7 + 2(1 - (-1/6)^n)b/7$ konsumenter fabrikat A och $5(1 + (-1/6)^n)a/7 + (5 + 2(-1/6)^n)b/7$ använder B.

4. (a) Vi bestämmer först en bas för kolonnrummet. Pivotkolonnerna i A utgör en sådan. Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & -14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{TF.}$$

Vi ser att 1:a, 3:e och 5:e kolonnerna i A är piviotkolonnerna och därmed är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

en bas för kolonnrummet. Vi underkastar den Gram-Schmidt och får

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - 0 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2. \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||^2}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \frac{18}{18} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{18}{18} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: En ortogonalbas utgörs av $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Enligt projektionsformel ges den ortogonala projektionen $\hat{\mathbf{v}}$ av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$ av

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||^2} \cdot \mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_3}{||\mathbf{u}_3||^2} \cdot \mathbf{u}_3 = \tag{1}$$

$$= \frac{18}{18}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{18}{18}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{18}{18}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Svar: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(c) Avståndet mellan $\mathbf{v}$ och kolonnrummet är samma som avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\hat{\mathbf{v}}$ och det är

$$||\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}|| \quad = \quad ||\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}|| = \sqrt{9+1+4+4} = 3\sqrt{2}.$$

Svar: $3\sqrt{2}$.

5. Om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ är en ortonormalbas för $H^\perp$ och vi sätter $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$ så ges standardmatrisen för ortogonal projektion på $H^\perp$ av UU^T.

Vi bestämmer först en bas för $H^\perp$. Om vi sätter

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

så gäller att $\mathbf{x} \in H^\perp$ precis när $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs $H^\perp = \mathrm{Nul}(A^T)$. Vi bestämmer därför en bas för $\mathrm{Nul}(A^T)$. Radoperationer ger

$$A^T \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen till $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ges därför av

$$\mathbf{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2x_2 - 4x_3 - 5x_4)/2 \\ (x_3 - 9x_4)/4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{4}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Därmed är $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$ en bas för $H^\perp$. Vi ser också att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, så det är en ortogonalbas. Båda vektorerna i basen har längd $\sqrt{81+1+16} = \sqrt{2\cdot 49} = 7\sqrt{2}$. Vi har därför att $\mathbf{u}_1 = (1/(7\sqrt{2}))\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = (1/(7\sqrt{2}))\mathbf{v}_2$ är en ortonormalbas. Standard matrisen för ortogonala projektionen på $H^\perp$ ges därför av

$$UU^T \quad = \quad \frac{1}{98}\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 1 & -9 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -9 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 82 & 0 & -36 & -4 \\ 0 & 82 & 4 & -36 \\ -36 & 4 & 16 & 0 \\ -4 & -36 & 0 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 41 & 0 & -18 & -2 \\ 0 & 41 & 2 & -18 \\ -18 & 2 & 8 & 0 \\ -2 & -18 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 41 & 0 & -18 & -2 \\ 0 & 41 & 2 & -18 \\ -18 & 2 & 8 & 0 \\ -2 & -18 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

6. (a) Att 0 inte är ett egenvärde till A betyder att $A\mathbf{x} = 0 = 0\mathbf{x}$, bara om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom A är kvadratisk är A därför inverterbar.

Svar: Det stämmer.

(b) Vi har att

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} U & \mathbf{b}' \end{pmatrix} \quad \text{TF.}$$

Sista kolonnen är ej pivotkolonn eftersom U har ledande element på varje rad (enligt förutsättning). Alltså är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för varje $\mathbf{b}$.

Svar: Det stämmer.

(c) Om vi sätter

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

så gäller

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Varje vektor är egenvektor till AB (med egenvärde 0). Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är inte egenvektor till $A = B$.

Svar: Det stämmer inte.