Lösningar till MVE021 Linjär algebra för I1 17-10-07

1. (a) Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(TF)}.$$

Vi har pivotkolonner första och tredje kolonnerna. Det ger x_2, x_4 och x_5 är fria. Detta ger att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har lösningarna

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -x_2 + x_4 + x_5 & x_2 & x_4 + 2x_5 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T \\ &= x_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + x_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Svar: Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ är en bas för nollrummet till A

(b) Eftersom $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är en ortonormalbas för H ges ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ av

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 =$$
$$-\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 = (1/7) \begin{pmatrix} 18 & -27 & -14 & -5 \end{pmatrix}^T,$$

Svar: $(-1/7) \begin{pmatrix} -18 & 27 & 14 & 5 \end{pmatrix}^T$.

(c) Om $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}$, så är kolonnerna linjärt oberoende om varje kolonn i A är pivotkolonn. Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 8 & 1-h \\ -2 & 2 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & -10 & h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3-h \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & h+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3-h \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h+6 \end{pmatrix} \quad \text{(TF)}.$$

Av detta följer att de fyra vektorerna är linjärt beroende när precis när $h = -6$.

Svar: När $h = -6$.

(d) Vi kollar vilket egenvärde som $\mathbf{v}$ hör till:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+10-6 & -2+2 & -4-15+4 & 4+10-8 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v}$$

Detta ger att $A^6\mathbf{v} = 3^6\mathbf{v}$.

Svar: $729\mathbf{v}$.

(e) Om $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ så är H kolonnrummet till A och $H^\perp$ är nollrummet till A^T. Radoperationer ger

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen till detta är $x_4 = x_4$, $x_3 = x_3$, $x_2 = 0$, $x_1 = -2x_3 - 2x_4$, som ger basen $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. Vi bestämer nu en ortogonalbas med hjälp av Gram-Schmidts metod och har

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{w}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2} \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2/5 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Svar: (T.ex.) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T$.

(f) Vi bestämmer inversen till A med hjälp av Jacobis metod:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A \mid I_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim
\end{aligned}$$

Svar: $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Dimensionen av kolonnrummet är antalet pivotkolonner i A. För att avgöra vilka de är gör vi radoperationer till TF. Vi har

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2+h & 0 \\ 2 & 11+3h & 13+h \\ 2 & -1-h & 13-h \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3+h & 2 \\ 0 & 9+3h & 9+h \\ 0 & -3-h & 9-h \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3+h & 2 \\ 0 & 0 & 3+h \\ 0 & 0 & 11-h \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

När $h = -3$ är 1:a och 3:e kolonnerna pivotkolonnerna. För andra värden på h är 1:a, 2:a och 3:e kolonnerna pivotkolonner.

Svar: $h = -3$.

(b) När $h = -3$ har A två pivotkolonner, så $\dim(\mathrm{Col(A)}) = 2$. För andra värden på h har A tre pivotkolonner, så då är $\dim(\mathrm{Col(A)}) = 3$.

Svar: Svar 2 när $h = -3$, och 3 annars.

3. Ekvationssystemtet kan skriva $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, där

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi undersöker om A är diagonaliserbar genom att söka dess egenvärden. De är lösningar till ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda I) \quad = \quad \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

Matrisen har alltså de två egenvärdena -1 och -2 och är därför diagonaliserbar. Vi söker egenvektorer till dessa egenvärden. När $\lambda = -1$ har vi

$$A + I \quad = \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger (t.ex) egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}^T$ När $\lambda = -2$ har vi

$$A + I \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger (t.ex) egenvektorn $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$. Vi får att $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{-2t}\mathbf{v}_2$. Villkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^T$ ger nu systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Radoperation på utökad koefficientmatris ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $c_1 = -1$ och $c_2 = 3$.

Svar $x_1(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t}$, $x_2 = 3e^{-t} - 6e^{-2t}$.

4. Vi bestämmer först en bas för nollrummet. Matrisen har trappstegsform så vi ser att nollrummet består av alla vektorer $\begin{pmatrix} (6x_4 - 2x_3)/4 & 2x_4 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T = x_3 \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + x_4 \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. En bas för nollrummet utgörs alltså av $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$. Om $B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$, så är kolonnrummet för B nollrummet för A. Vi söker nu $B\mathbf{x}$ så att $|B\mathbf{x} - \mathbf{v}|$ är minimalt. Det inträffat när vektorn $B\mathbf{x} - \mathbf{v}$ är ortogonal mot kolonrummet för B, dvs när $B^T(B\mathbf{x} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, eller $B^TB\mathbf{x} = B^T\mathbf{v}$. Vi har

$$B^TB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 29 \end{pmatrix}$$

och

$$B^T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Systemtets utökade koeffiencientmatris är därför

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B^TB & B^T\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 29 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 55 & -27 \\ -3 & 29 & -13 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -55 & 27 \\ 0 & -136 & 68 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -55 & 27 \\ 0-2 & 1 & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså är $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^T$ och $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$. Avstådet mellan $B\mathbf{x}$ och $\mathbf{v}$ är därför längden av $B\mathbf{x}-\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^T = 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ som är $3\sqrt{7}$.

Svar: $3\sqrt{7}$.

5. Matrisen A ärdiagonaliserbar precis när $\mathbb{R}^4$ har en bas bestående av egenvektorer till A. Egenvärden är lösningar till

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 1-\lambda & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 3-\lambda & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1-\lambda \\ -3 & 1-\lambda & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 3-\lambda & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)(-3-\lambda).$$

Egenvärdena är alltså -1, -3 och 3. Vi bestämmer dimensionen av nollrummet till $A-\lambda$ för vart och ett av dessa. Om summan av dessa är fyra är A diagonaliserbar, annars inte. Vi använder här att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala och därför linjärt oberoende. När $\lambda = 1$ har vi

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -28 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger att egenrummet till 1 har dimension 1. När $\lambda = 3$ har vi

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & -2 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & 7 & 42 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 42 \\ 0 & 0 & 11 & 66 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså har egenrummet som hör till 3 dimension 1. När $\lambda = -3$ gäller

$$A + 3I = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet till -3 har därmed dimension 1. Egenrummens samanlagda dimensioner är alltså 3, så $\mathbb{R}^4$ kan inte ha en bas av egenvektorer till A och därför är A inte diagonaliserbar.

Svar: A är inte diagonaliserbar.

6. (a) Att λ är ett egenvärde till A betyder att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Multiplikation med 7 ger $(7A)\mathbf{v} = (7\lambda)\mathbf{v}$, dvs 7λ är egenvärde till $7A$ (med egenvektor $\mathbf{v}$.)

   Svar: Det stämmer.

   (b) Att λ är ett egenvärde till A betyder att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Multipikation med 6^2 ger $(6A)(6\mathbf{v}) = (6\lambda)(6\mathbf{v})$ och att $6\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

   Svar: Det stämmer.

   (c) Om $\mathbf{v}$ är en enlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, och $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$, så är $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{b}$. Enligt förutsättning är därför $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Det betyder att nollrummet till A är trivialt och därmed har kolonrummet till A dimension n. Kolonnrummet är ett delrum till $\mathbb{R}^m$, så därmed är $n \leq m$.

   Svar: Det stämmer.