Lösningar till MVE022 Linjär algebra för I1 18-05-31

1. (a) Det gäller att

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8-h \\ 8+2h \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bara är möjligt när $\lambda = -2$, vilket i sin tur ger $h = -6$.

Svar: $h = -6$.

(b) Vektorerna utgör en bas precis när varje kolonn i matrisen $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}$ är pivotkolonn.
Radoperationer ger

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & h+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & h-1 \\ 0 & h+1 & 1 & h-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & h+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & h-1 \\ 0 & 0 & 2 & h-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & h+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Här har vi trappstegsform när $h \neq -1$ och varje kolonnn är då pivotkolonn. När $h = -1$ finns det en kolonn som inte är pivotkolonn.

Svar: När $h \neq -1$.

(c) En bas ges av pivotkolonnerna i A. Radoperationer ger

$$A \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(TF)}.$$

Av detta följer att första, andra och fjärde kolonnerna i A är en bas för kolonnrummet.

Svar: Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}^T$ är en bas för kolonnrummet till A

(d) Vi använder Gram-Schmidt och sätter $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ och sedan

$$\mathbf{u}_2 \quad = \quad \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{23}{23} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Svar: T.ex $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) En matris är inverterbar precis när dess determinant är $\neq 0$. Vi adderar nedersta raden till översta och har

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 2+h & 0 & 0 & 2+h \\ 9 & h+2 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & h & -2 \\ h & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2+h) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & h+2 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & h & -2 \\ h & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar första kolonnen från sista och får

$$\det(\mathrm{A}) = (h+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & h+2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & h & 0 \\ h & 2 & -3 & 1-h \end{vmatrix} = (h+2)(h+2)h(1-h),$$

eftersom den sista matrisen är nedåt triangulär.

Svar: När $h = -2$, $h = 0$, $h = 1$.

(f) Vi bestämmer inversen till A med hjälp av Jacobis metod:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 22 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Svar: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 12 & 5 & -2 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Vi hoppas att A är diagonaliserbar: om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är egenvektorer till A som bildar en bas för $\mathbb{R}^2$ ges allmänna lösningen av $\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2$, där λ_1 och λ_2 är egenvärden som hör till $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$.

   Vi bestämmer egenvärden genom att lösa den karakteristiska ekvationen $\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}) = 0$. Vi har

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 \\ 30 & -12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$$

   Egenvärden är därför $\lambda = 3$ och $\lambda = -2$. Eftersom egenvärdena är reella och har multiplicitet 1 vet vi att A är diagonaliserbar. Vi söker egenvektorer.

   När $\lambda = 3$ har vi

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Detta ger att (t.ex) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ är en bas för egenrummet för 3.

När $\lambda = -2$ har vi

$$A - 3I \quad = \quad \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 30 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att (t.ex) $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ är en bas för egenrummet för -2.

Detta ger

$$\mathbf{x}_k = c_1 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2(-2)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

När $k = 0$, ska vi ha $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Det ger ett ekvationsssytem med utökad koefficientmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

så $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

Svar: $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^k - (-2)^k \\ 4 \cdot 3^k - 3 \cdot (-2)^k \end{pmatrix}$.

3. Om vi sätter $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ gäller att varje vektor i H är $A\mathbf{x}$, för nåt $\mathbf{x}$. Vi är närmast $\mathbf{v}$ när $A\mathbf{x} - \mathbf{v} \perp \mathrm{Col(A)}$, eftersom $\mathrm{Col(A)} = \mathrm{H}$. Detta ger vilkoret $A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, eller $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{v}$. Vi löser detta ekvationssystem och har sen att $A\mathbf{x}$, där $\mathbf{x}$ är en lösning, ger den vektor i H som ligger närmast $\mathbf{v}$.

   Vi har

$$A^T A \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{och}$$

$$A^T\mathbf{v} \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

   Vi löser $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{v}$ med radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} A^T A & A^T\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 22 & 12 & 32 \\ 12 & 10 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 6 & 16 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   vilket ger $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T$ och $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, vilket är den vektor i H som ligger närmast $\mathbf{v}$. Avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H är avståndet mellan $\mathbf{v}$ och denna vektor. Det är $|| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}^T || = \sqrt{4 + 4 + 16 + 25} = 7$.

   Svar: Vektorn $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ är den vektor i H som ligger närmast $\mathbf{v}$ och avståndet mellan H och $\mathbf{v}$ är 7.

4. Om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ är en ortonormalbas för H ges matrisen för ortogonal projektion på H av UU^T, där $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer först en ortogonalbas för H med hjälp av Gram-Schmidt och den givna basen:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} - \frac{50}{25}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normering av $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ ger ortonormalbasen $\mathbf{u}_1 = (1/5)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = (1/5)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^T$. Med $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$, har vi att matrisen för projektionen ges av

$$UU^T = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. (a) Vi har att

$$\begin{aligned} T(p(t) + q(t) &= t(p(t) + q(t))'' - 2(p(t+1) + q(t+1)) = \\ &= tp''(t) - 2p(t+1) + tq'(t) - 2q(t+1) = T(p(t)) + T(q(t)) \\ T(cp(t)) &= t(cp(t))'' - 2cp(t+1) = c(tp''(t) - 2p(t+1)) = cT(p(t)). \end{aligned}$$

Detta visar att T är en linjär avbildning.

(b) T är diagonaliserbar precis när matrisen för T med avseende på nån bas för $\mathbb{P}_3$ är diagonaliserbar. Det spelar ingen roll vilken bas vi väljer så vi väljer därför basen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Matrisen för T relativt denna bas ges av $\begin{pmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}} & [T(t)]_{\mathcal{B}} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}} & [T(t^3)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.
Vi har

$$\begin{aligned} T(1) &= t \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2 \\ T(t) &= t \cdot 0 - 2(t+1) = -2 - 2t \\ T(t^2) &= t \cdot 2 - 2(t+1)^2 = -2 - 2t - 2t^2 \\ T(t^3) &= t \cdot 2 \cdot 3t - 2(t+1)^3 = -2 - 6t - 2t^2 \end{aligned}$$

Koordinaterna med avseende på $\mathcal{B}$ utgörs av koefficienterna så matrisen för T blir

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen är uppåt triangulär, så egenvärdena står längs huvuddiagonalen. Vi ser att enda egenvärdet är -2 med multiplicitet 4. För att M ska vara diagonaliserbar krävs att nollrummet till $M + 2I$ har dimension 4, men

$$M + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så nollrummet har dimension 2.

Svar: Nån sån bas för $\mathbb{P}_3$ finns inte.

6. (a) Om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, gäller $A(B\mathbf{v}) = AB\mathbf{v} = BA\mathbf{v} = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(B\mathbf{v})$, så $B\mathbf{v}$ är en egnvektor till A.

   Svar: Det stämmer.

   (b) Om 0 är ett egenvärde till A gäller att $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = 0$, för nåt $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Det är samma sak som att kolonnerna i A är linjärt beroende.

   Svar: Det stämmer.

   (c) Om t.ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = A^T$, gäller att $AB = 5$ som är inverterbar, medan

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   som har determinant 0 och därför inte är inverterbar.

   Svar: Det stämmer inte.