Lösningar till MVE022 Linjär algebra för I1, 18-08-27

1. (a) Vi identifierar pivotkolonner i utökade koefficientmatrisen med radoperationer till trappstegsform:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 3 & 2h-1 & -2 \\ 4 & -5 & 7-2h & 5 \\ -2 & 2 & h-2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 7-2h & 5 \\ -2 & 2 & h-2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -17-2h & -7 \\ 0 & -2 & h+10 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -7-h & -3 \\ 0 & -2 & h+10 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -7-h & -3 \\ 0 & 0 & -h-4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

Här har vi trappstegform och de tre första kolonnerna är pivotkolonner när $h \neq -4$ och vi har då precis en lösning. När $h = -4$ är sista kolonnen pivotkolonn och lösning saknas.

Svar: Precis en lösning när $h \neq -4$ och ingen lösning när $h = -4$.

(b) Om A betecknar standardmatrisen är $\mathbf{v}$ i bilden av T precis när $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ är konsitent (har en lösning).
Vi gör radoperationer på utökad koefficientmatris till trappstegsform:

$$\left(A \mid \mathbf{v} \right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & 8+2h \\ 6 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6+2h \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6+2h \\ 0 & 0 & -2 & 20+6h \\ 0 & 0 & 4 & -16-4h \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6+2h \\ 0 & 0 & -2 & 20+6h \\ 0 & 0 & 0 & 24+8h \end{array}\right)$$

Här har vi trappstegsform och sista kolonnen är inte pivotkolonn precis när $h = -3$.

Svar: När $h = -3$.

(c) Vi har att

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 - 2 + 2 + 8 = 0,$$

så de två vektorerna är ortogonala och därmed linjärt oberoende. De utgör därför en ortongonalbas för $H = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Det betder att den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på H ges av

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2 = \frac{50}{25}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{25}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(d) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A gäller $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, där λ det egenvärde som $\mathbf{v}$ hör till. Vi har

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}.$$

Svar: 2.

(e) Det gäller att $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Vi får

$$\mathbf{v} = A[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi löser $B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}$ genom att göra radoperationer på utökade koefficientmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} B & | & \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

som ger $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Svar: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(f) Om $A_{3,2}$ betecknar den matris som får från A genom att stryka rad 3 och kolonn 2 gäller att elementet på position $(2,3)$ i A^{-1} ges av

$$\frac{(-1)^{2+3}}{\det(A)}\det(A_{3,2}) = \frac{-1}{27h}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 9 & 8 & -1 \\ 9 & 9 & 1+h \end{vmatrix} = \frac{-1}{27h}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4+h \end{vmatrix} = \frac{-1}{27h}\Big(3\cdot(8+2h-6)\Big) = \frac{-2(h+1)}{9h}.$$

Svar: $-\dfrac{2(h+1)}{9h}$.

2. Vi har att $H = \mathrm{Col}(A)$, där $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$. Detta ger att $H^{\perp} = \mathrm{Null}(A^T)$, som vi bestämmer en bas för genom att göra radoperationer på A^T till trappstegsform:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -3 \\ 4 & 10 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 18 & -24 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $x_4 = t$, $x_3 = s$, $x_2 = 4s/3 - 5t/6$ och $x_1 = 2(4s/3 - 5t/6) - 6s + 3t = -10s/3 + 4t/3$, dvs att lösnignarna till $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ges av

$$\mathbf{x} = \frac{s}{3}\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

vilket ger att de två vektorerna i högra ledet är en bas för $H^\perp$.

Vi bestämmer en ortogonalbas för $H^\perp$ genom att utsätta denna bas för Gram-Schmidts metod:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}_2' &= \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-100}{125}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

så vi väljer $\mathbf{u}_2 = (5/3)\mathbf{u}_2'$.

Svar: (T.ex.) $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3. (a) Vi bestämmer först en bas för nollrummet till A med radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & -9 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 10 & -9 & 0 \\ 1 & -22 & 18 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -22 & 18 & 9 \\ 0 & 54 & -45 & -18 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -22 & 18 & 9 \\ 0 & 6 & -5 & -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

som ger att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har lösningarna $x_4 = t$, $x_3 = s$, $x_2 = 5s/6 + t/3$ och $x_1 = 22(5s/6 + t/3) - 18s - 9t = 2s/6 - 5t/3$ som ger

$$\mathbf{x} = \frac{s}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{s}{6}\mathbf{v}_1 + \frac{t}{3}\mathbf{v}_2,$$

som ger att de två vektorerna i högra ledet är en bas för nollrummet. Med $B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ ska vi få vänstra ledet att ligga så nära högra ledet som möjligt i $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Det inträffar när $\mathbf{x}$ löser normalekvationen $B^TB\mathbf{x} = B^T\mathbf{v}$. Vi har

$$\begin{aligned}
B^TB &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & -5 \\ -5 & 35 \end{pmatrix} \\
B^T\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 65 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vi löser $B^T B\mathbf{x} = B^T\mathbf{v}$ genom radoperationer på utökade koefficientmatrisen och har

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c} B^TB & B^T\mathbf{v}\end{array}\right) &\sim \begin{pmatrix} 65 & -5 & 55 \\ -5 & 35 & 65 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 & -1 & 11 \\ -1 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 13 \\ 0 & 90 & 180 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

som ger $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Av detta följer att $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}^T$ är den vektor i nollrummet till A som ligger närmast $\mathbf{v}$.

Svar: $\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) Avståndet mellan nollrummet till A och $\mathbf{v}$ är avståndet mellan den vektor i nollrummet till A och $\mathbf{v}$. Från a) har vi därför att avståndet är

$$\left|\left| \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right|\right| = \left|\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{4+4+1+16} = 5.$$

Svar: 5.

4. Vi bestämmer egenvärden till A genom att lösa

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 22 & -6 & -6 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 4 \\ -9 & -1 & 1-\lambda & 18 \\ 2 & 11 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -2(2-\lambda) \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 4 \\ -9 & -1 & 1-\lambda & 18 \\ 2 & 11 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 4 \\ -9 & -1 & 1-\lambda & 18 \\ 2 & 11 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 11 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

Detta ger att egenvärdena är 1 med multiplicitet 2, 2 och 3 med vardera multiplicitet 1. Det betyder att A är diagonaliserbar precis när egenrummet till 1 har dimension 2.

Vi bestämmer dimensionen av egenrummet till 1, som är samma som nollrummet till $A - I_4$, med radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{aligned} A - I_4 &= \begin{pmatrix} 5 & 22 & -6 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ -9 & -1 & 0 & 18 \\ 2 & 11 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ -9 & -1 & 0 & 18 \\ 2 & 11 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Här ser vi att vi har tre pivotkolonner, så dimensionen av egenrummet till 1 är 1, vilket ger att matrisen inte är diagonaliserbar.

Svar: Matrisen är inte diagonaliserbar.

5. (a) H är ett delrum till $M_{2,5}$ om det innerhåller O, är slutet under addition och multiplikation med skalär.
   i. Eftersom $OB = O$ gäller att $O \in H$.
   ii. Antag att $A, C \in H$, dvs att $AB = O$ och $CB = O$. Då gäller att $(A+C)B = AB + CB = O + O = O$, så $A + C \in H$.
   iii. Antag att $A \in H$, dvs $AB = O$ och att c är en godtycklig skalär. Då gäller $(cA)B = c(AB) = cO = O$, så $cA \in H$.

   (b) Låt $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ vara raderna i $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ vara kolonnerna i $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$. Då gäller att $AB = O$ precis när $\mathbf{a}_1^T$ och $\mathbf{a}_2^T$ ligger i ortogonala komplementet till $\mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \mathrm{Col}(B)$, vilket är samma som nollrummet till B^T. Vi bestämmer dimensionen av detta genom att göra radoperationer till trappsegsform på B^T :

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vi har alltså två pivotkolonner, vilket ger att dimensionen är 3. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vara en bas. Detta ger att $AB = O$ precis när $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ båda är linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1^T$, $\mathbf{v}_2^T$, $\mathbf{v}_3^T$. Om $A \in H$ gäller att även $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ ligger i H. Eftersom $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$, gäller därför att varje $A \in H$ är en linjärkombination av följande sex matriser i H :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v}_3^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_1^T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_2^T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_3^T \end{pmatrix}$$

Dessa sex matriser är linjärt oberoende eftersom

$$\begin{aligned} O &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_3^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \\ &+ c_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_1^T \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_2^T \end{pmatrix} + c_6 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\mathbf{v}_1^T + c_2\mathbf{v}_2^T + c_3\mathbf{v}_3^T \\ c_4\mathbf{v}_1^T + c_5\mathbf{v}_2^T + c_6\mathbf{v}_3^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bara inträffar när $c_1 = \ldots = c_6 = 0$, eftersom $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende.

Svar: Dimensionen av H är 6.

6. (a) Om $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, så gäller att $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ som är ortogonal mot $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ för alla a och b. Matisen A är matrisen för rotation 90° moturs i planet och har därför inte 1 som egenvärde.
   Svar: Påståendet stämmer inte.

(b) Ett polynom $p(t)$ i $\mathbb{P}_4$ har grad högst 4 (eller är nollpolynomet). Talen 2 och 3 är enligt faktorsatsen nollställen precis när $p(t) = (t-2)(t-3)(a+bt+ct^2) = a(t-2)(t-3) + bt(t-2)(t-3) + ct^2(t-2)(t-3)$. Det betyder att delrummet är linjära höljet till de tre polynomen $(t-2)(t-3)$, $t(t-2)(t-3)$, $t^2(t-2)(t-3)$. Dessa är linjärt obereoende eftersom $a(t-2)(t-3)+bt(t-2)(t-3)+ct^2(t-2)(t-3)$ är nollpolynomet precis när polynomets samtliga koefficienter är 0. Genom att identifiera koefficienter framför t^4, t^3 och t^2 får vi att $c = 0$ sen $b = 0$ och tillsist $a = 0$.

Svar: Påståendet stämmer.

(c) Matrisen A är diagonaliserbar precis när det finns en diagonal matris D och en inverterbar matris P, så att $A = PDP^{-1}$. Räkneregler för transponat ger $A^T = (PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T$, vilket visar att A^T är diagonaliserbar, eftersom P^T är inversen till $(P^T)^{-1}$.

Svar: Påståendet stämmer.