Lösningar till MVE022 Linjär algebra för I1 18-10-13

1. (a) $\mathbf{v}$ är en linjär kombination av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ precis när $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$, där $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$, har en lösning.

   Radoperationer på utökad koefficientmatris ger

$$\left(A \mid v \right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -7 & -6 & 25 & 1 \\ -2 & -2 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & h & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & h+21 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h+25 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(h+25) \end{array}\right).$$

   Vi ser att sista kolonnen är pivotkolonn precis när $h \neq -25$, så ekvationssystemet är lösbart när $h = -25$ (och bara då).

   Svar: När $h = -25$.

   (b) Vi utsätter systemets utökade koefficientmatris för radoperationer och får

$$\begin{pmatrix} 14 & 14 & 6+2h & 25 \\ 6 & 4 & 4+h & 8 \\ 6 & 6 & h+2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 4+h & 8 \\ 6 & 6 & h+2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2+h & 2 \\ 0 & 0 & h-4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Här har vi trappstegsform när $h \neq 4$ och sista kolonnen är då inte pivotkolonn, medan övriga är det. Det ger att det finns precis en lösning för varej $h \neq 4$. När $h = 4$ är sista kolonnen pivotkolonn, så lösning saknas.

   Svar: Precis en lösning för varje $h \neq 4$ och ingen lösning när $h = 4$,

   (c) Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & -11 & -3 \\ 15 & 7 & -11 & -29 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & -19 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Av detta följer att första, andra och tredje kolonnerna i A är en pivotkolonner.

   Svar: Första, andra och tredje kolonnerna.

   (d) Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -9 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För $\mathbf{x}$ som löser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gäller därför $x_5 = 0$, $x_4 = t$, $x_3 = s$, $x_2 = -2s + t$, $x_1 = -3s + 2t$, eller att

$$\mathbf{x} \quad = \quad t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger två vektorer som tillsammans bildare en bas för nollrummet.

Svar: T.ex $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(e) En matris är inverterbar precis när dess determinant är $\neq 0$. Radoperationer

$$\det(A) \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6-h & 1 \\ 1 & 6-h & 2+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4-h & -2 \\ 0 & 4-h & -1+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-h & -2 \\ 0 & 1+h \end{vmatrix} = (4-h)(1+h)$$

Det ger att matrisen är inverterbar för alla h utom $h = 4$ och $h = -1$.

Svar: Determinanten är $-h^2 + 3h + 4$. Matrisen är inverterbar utom när $h = 4$ och när $h = -1$.

(f) Vi bestämmer inversen till A med hjälp av Jacobis metod:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array} \right) \quad &= \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 22 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 54 & -16 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Svar: $\begin{pmatrix} 54 & -16 & 7 \\ -16 & 5 & -2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

2. A:s, B:s och C:s intäkter från den interna handeln är p_A, p_B respektive p_C.

   A:s konstnader är $p_A/5 + p_B/5 + p_C/5$. Motsvarande för B och C är $p_A/5 + 2p_B/5 + 3p_C/5$ respektive $3p_A/5 + 2p_B/5 + p_C/5$.

   Intäkter och kostnader ska balansera, vilket leder till ekvationen

$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 \\ 3/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{pmatrix}.$$

Vi sätter $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_A & p_B & p_C \end{pmatrix}^T$ och låter A beteckna matriser och får att $A\mathbf{p} = \mathbf{p}$, dvs att $\mathbf{p}$ är en egenvektor till A som hör till egenvärdet 1. Vi söker en bas för egenrummet till detta egenvärde:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -4/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -3/5 & 3/5 \\ 3/5 & 2/5 & -4/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -11 & 13 \\ 0 & 11 & -13 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger $p_C = t,\ p_B = 13t/11$ och $p_A = 6t/11$. Vi ska ha $p_A = 1$, vilket ger $t = 11/6$ och $p_B = 13/6$ samt $p_C = 11/6$.

Svar: $p_B = 13/6$ och $p_C = 11/6$.

3. Vi sätter

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

och har att vi ska lösa $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$. Om $\mathbb{R}^3$ har en bas som består av egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ till A ges allmänna lösningen till ekvationen av $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{t\lambda_1} + c_2\mathbf{v}_2e^{t\lambda_2} + c_3\mathbf{v}_3e^{t\lambda_3}$, där c_1, c_2, c_3 är godtyckliga konstanter och λ_1, λ_2, λ_3 är respektive egenvektors egenvärde.

Vi bestämmer egenvärden till A genom att lösa

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 5 \\ 1 & 5-\lambda & 5 \\ 1 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Addition av kolonn 2 och 3 till första i determinanten ger

$$0 = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 3 & 5 \\ 11-\lambda & 5-\lambda & 5 \\ 11-\lambda & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5-\lambda & 5 \\ 1 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (11-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Egenvärdena till A är 2 med multiplicietet 2 och 11 med multiplicitet 1.

Vi söker en bas för egenrummet till 2 :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $x_3 = t$, $x_2 = s$, $x_3 = -3s - 5t$ och basen $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ för egenrummet som hör till $\lambda = 2$.

För egenrummet till 11 har vi

$$A - 11I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 27 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $x_3 = t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.
Den allmänna lösningen är alltså

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{11t}.$$

När $t = 0$ ska vi ha $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Detta ger ekvationssystemet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Radoperationer på utökad koefficentmatris ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right),$$

vilket ger $c_3 = 1$, $c_2 = -2$, $c_1 = 2$.

Svar: $x_1(t) = 4e^{2t} + e^{11t}$, $x_2(t) = 2e^{2t} + e^{11t}$, $x_3(t) = -2e^{2t} + e^{11t}$.

4. Vi bestämmer först en bas för ortogonala komplementet till Span$\{\mathbf{v}\}$ för att hitta vektorer ortogonala mot $\mathbf{v}$. Det är nollrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Parameterframställning av det ges av $x_4 = u$, $x_3 = t$, $x_2 = s$, $x_1 = -s - t/2 - 2u$, så en bas för ortogonala kompletmentet till Span$\{\mathbf{v}\}$ ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi använder Gram-Schmidts metod på dessa och får

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{u}_2' &= \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi väljer här istället $\mathbf{u}_2$ som $2\mathbf{u}_2'$.

Vidare får vi

$$\mathbf{u}_3' \quad = \quad \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3 \bullet \mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{b}_3 \bullet \mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||^2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{18}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{18}\begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ -8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Vi väljer här $\mathbf{u}_3$ som $-(9/2)\mathbf{u}_3'$. De fyra vektorerna $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ utgör nu en ortogonalbas för $\mathbb{R}^4$.

Svar: (T.ex) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$

5. (a) För att visa att H är ett delrum ska vi visa att nollpolynomet är i H och att H är sluten under addition och multiplikation med skalär.
   i. Eftersom nollpolynomet är noll i alla punkter gäller att det har samma värde i -1, 0 och 1 och är därför med i H.
   ii. Antag att $p(t)$ och $q(t)$ ligger i H. Det betyder att $p(-1) = p(0) = p(1)$ och att $q(-1) = q(0) = q(1)$, vilket ger $p(-1)+q(-1) = p(0)+q(0) = p(1)+q(1)$. Det ger att $p(t)+q(t)$ har samma värde i -1, 0 och 1 och är därför med i H.
   iii. Antag att $p(t)$ ligger i H och c är en skalär. Då gäller $p(-1) = p(0) = p(1)$ och därmed att $cp(-1) = cp(0) = cp(1)$, vilket visar att $cp(t)$ ligger i H.

   (b) Att $p(t) \in H$ betyder att $p(t) - p(0)$ har nollställena -1, 0 och 1. Faktorsatsen ger att $p(t) - p(0) = t(t-1)(t+1)q(t)$, där $q(t)$ är godtyckligt av grad 2 eftersom $p \in \mathbb{P}_5$. Vi ser också att vi kan välja $p(0)$ godtyckligt. Detta ger att om $p \in H$, så är $p(t) = a \cdot 1 + (t^3 - t)(b + ct + dt^2)$, där a, b, c och d är godtyckliga skalärer. Det betyder att polynomen $p_1 = 1$, $p_2 = t^3 - t$, $p_3 = t^4 - t^2$ och $p_4 = t^5 - t^3$ spänner ut H. De är linjärt oberoende för om $a \cdot 1 + b(t^3 - t) + c(t^4 - t^2) + d(t^5 - t^3)$ är nollpolynomet måste alla koefficienter i polynomet vara noll, vilket ger $d = 0$, $c = 0$, $b = 0, a = 0$. Alltså utgör p_1, p_2, p_3 och p_4 bas för H.

   Svar: (T.ex.) 1, $t^3 - t$, $t^4 - t^2$, $t^5 - t^3$.

   (c) Vi har att $T(1) = 2$, $T(t^3 - t) = 0$, $T(t^4 - t^2) = 2/5 - 2/3 = -4/15$ och att $T(t^5 - t^3) = 0$.
   Polynomet $q(t) = a \cdot 1 + b \cdot (t^3 - t) + c \cdot (t^4 - t^2) + d(t^5 - t^3)$ ligger i kärnan till T precis när $0 = T(q(t)) = 2a - 4c/15$, dvs $15a/2 = c$.
   Det betyder att $q(t) = (a/2)(2 + 15t^4 - 15t^2) + b(t^3 - t) + d(t^5 - t^3)$, där $a/2$, b och d är godtyckliga. Av detta följer att polynomen $q_1 = 2 + 15t^4 - 15t^2$, $q_2 = t^3 - t$ och $q_3 = t^5 - t^3$ spänner ut kärnan till T. De är linjärt oberoende för om $aq_1 + bq_2 + cq_3 = a(2 + 15t^4 - 15t^2) + b(t^3 - t) + c(t^5 - t^3)$ är nollpolynomet, så måste $c = a = b = 0$.

   Svar: (T.ex.) $2 + 15t^t - 15t^2$, $t^3 - t$, $t^5 - t^3$.

6. (a) Om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är ortogonala gäller att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, så

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = ((\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2.$$

Eftersom $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$ och $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||$ båda är icke-negativa och har samma kvadrat är de lika.

Svar: Det stämmer.

(b) Om t.ex. A är en 2×3-matris med pivotposition på varje rad, så är en kolonnn i A inte pivotkolonn. Det betyder att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en icke-trivial lösning $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Då gäller att $T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{0})$, så T är inte injektiv.

Svar: Det stämmer inte.

(c) Varje delrum H till $\mathbb{R}^n$ har en ortonormalbas $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$. Standardmatrisen för ortogonal projektion ges då av $A = UU^T$, där $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \ldots & \mathbf{u}_p \end{pmatrix}$. Det betyder att $A^T = (UU^T)^T = (U^T)^TU^T = UU^T = A$, vilket visar att A är symmeterisk.

Svar: Det stämmer.