Lösningar till MVE022 Linjär algebra för I1 19-06-04

1. (a) För att identifiera pivotkolonnerna i A överförs matrisen till U på TF genom radoperationern. Kolonner i U med ledande element är pivotkolonner i U och motsvarande kolonner i A är pivotkolonner i A.

Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -9 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & -3 & 7 & -7 \\ -4 & 2 & 6 & -2 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 7 & -7 \\ 4 & -2 & -9 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -15 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U$$

Här är U på TF och första, tredje och femte kolonnerna i U är pivotkolonner. Motsvarande kolonner i A är pivotkolonner i A.

Svar: Pviotkolonnerna i A är första, tredje och femte kolonnen.

(b) Att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A betyder att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för nån skalär λ.

Du har att

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ h & 5 & 6 \\ 14 & -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2h+57 \\ 21 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Första och tredje koordinaterna ger $\lambda = 3$, så du ska ha $2h + 57 = 9$ eller $h = -48/2 = -24$.

Svar: $h = -24$.

(c) Om du sätter $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ gäller att $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}$. Det ekvationssystemets UKM överför du till TF med radoperationer

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & -9 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningen till det är

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(d) Vektorerna är linjärt beroende precis när matrisen som har dem som kolonner har nån kolonn som inte är pivotkolonn. Pivotkolonner identifierar du genom överföring till U på TF genom radoperationer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-h & 3 \\ -1 & 8-2h & 7+h \\ 0 & 3-h & -3h-10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-h & 3 \\ 0 & 9-3h & 10+h \\ 0 & 3-h & -3h-10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-h & 3 \\ 0 & 3-h & -3h-10 \\ 0 & 0 & 40+10h \end{pmatrix}.$$

Här saknas en pivotkolonn när $h = 3$ och när $h = -4$.

Svar: När $h = 3$ och när $h = -4$,

(e) Med räkneregler för determianter har du

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 12 & 13-h & 9 \\ 1 & 6 & h & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 13-4h & 21 \\ 1 & 6 & h & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -\begin{vmatrix} -6 & 13-4h & 21 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 16-4h & 24 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6(16-4h).\end{aligned}$$

Matrisen är inverterbar precis när determinanen är skild från 0. Det ger att matrisen är saknar invers precis när $h = 4$.

Svar: Determinanten är $24h - 96$. Matrisen saknar invers bara när $h = 4$.

(f) Gram-Schmidts metod utgår från en bas för vektorrummet och resulterar i en ortogonalbas. Du behöver inte först kolla att vektorerna som spänner ut W är en bas om du på slutet kollar att de vektorer du får med metoden utgör en ortogonal uppsättning vektorer.

Enligt Gram-Schmidt blir

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{98}{49} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \cdot \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \mathbf{v}_1 - \frac{50}{50} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Du ser att $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ är parvis ortogonala och får att de därför utgör en bas för W.

Svar: $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. (a) Dimensionen av nollrummet till en matris är samma som antalet kolonner som inte är pivotkolonner. För att identifiera vilka kolonner som är pivotkolonner överför du matrisen till U på TF. De kolonner som då innehåller ledande element är pivotkolonner, liksom motsvarande kolonnner i A.

Radoperationer ger

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & 3h-1 & 3h+6 & -2h-15 & 11 \\ -2 & 2h+10 & 2h-4 & 2h-2 & -2 \\ 2 & -8 & 6 & -2h-4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3h-1 & 3h+6 & -2h-15 & 11 \\ 0 & 8h+8 & 8h+8 & -2h-32 & 20 \\ 0 & -6h-6 & -6h-6 & 2h+26 & -16 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3h-1 & 3h+6 & -2h-15 & 11 \\ 0 & 8h+8 & 8h+8 & -2h-32 & 20 \\ 0 & 2h+2 & 2h+2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3h-1 & 3h+6 & -2h-15 & 11 \\ 0 & h+1 & h+1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h+4 & -2 \end{pmatrix} = U.\end{aligned}$$

När $h=-1$ ger ytterligare en radoperation att det bara finns två pivotkolonner. För andra värden på h blir det tre pivotkolonner (även när $h=-4$). Dimensionen av nollrummet är därför 3 när $h=-1$ och 2 annars.

Svar: Dimensionen av nollrummet är 3 när $h=-1$ och 2 annars.

(b) $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ pecis när $U\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (se (a) för U).
Du har

$$U\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1+3h+6+2h+15-22 \\ h+1+3-4 \\ -h-4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5h \\ h \\ -h \end{pmatrix}$$

så svaret är när $h=0$.

Svar: När $h=0$.

3. Du sätter A till systemets koefficientmatris och $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{pmatrix}^\top$ och har att du ska lösa $\mathbf{x}'(t)=A\mathbf{x}(t)$. Om $\mathbb{R}^3$ har en bas som består av egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ till A ges allmänna lösningen till ekvationen av $\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{v}_1e^{t\lambda_1}+c_2\mathbf{v}_2e^{t\lambda_2}+c_3\mathbf{v}_3e^{t\lambda_3}$, där c_1, c_2, c_3 är godtyckliga konstanter och λ_1, λ_2, λ_3 är respektive egenvektors egenvärde.

Du söker nu egenvärden till A med matrisens karaktäristiska polynom.

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 & -9 \\ -3 & 2-\lambda & -9 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4+\lambda & 0 \\ -3 & 2-\lambda & -9 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (4+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & -9 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & -9 \\ 1 & -12 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -(4+\lambda)\begin{vmatrix} 1+\lambda & 9 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8) = -(4+\lambda)^2(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Det betyder att A har egenvärdena $\lambda=-4$ med multiplicitet 2 och $\lambda=2$ med multiplicitet 1.

Du bestämmer nu en bas för egenrummet till -4 dvs till nollrummet av $A+4I$. Du har

$$A+4I = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Som bas kan du därför välja (t.ex.)

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sen bestämmer du en bas för egenrummet till $\lambda=2$ (som har dimension 1).

$$A-2I = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & -9 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -12 & -36 \\ 0 & -6 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så du kan välja basvektorn

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Formel ger nu att

$$\mathbf{x}(t) = c_1\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\, e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

När $t = 0$ ska du ha

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Den ekvationen har UKM

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Du får $c_1 = -2$, $c_2 = c_3 = 1$.

Svar: $x_1(t) = -e^{-4t} + 3e^{2t}$, $x_2(t) = -2e^{-4t} + 3e^{2t}$, $x_3(t) = -e^{-4t} - e^{2t}$.

4. Du börjar med att bestämma en bas $\mathcal{B}$ för $\operatorname{Null} A$. När du har den sätter du vektorerna i den som kolonner i en matris B.

   Nollrummet till A är då samma som kolonnrummet till B. Den vektor $\hat{\mathbf{v}}$ i det rummet som ligger närmast $\mathbf{v}$ bestämmer du (t.ex.) med minsta kvadratmetoden. Normalekvationen till $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ är $B^\top B\mathbf{x} = B^\top\mathbf{v}$. När du har en lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till den är $\hat{\mathbf{v}} = B\hat{\mathbf{x}}$.

   Du bestämmer en bas för nollrummet till A genom att lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med hjälp av radoperationer

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & -6 \\ 8 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Det ger dig (t.ex.) basen $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ där

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Du sätter nu

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och får

$$B^\top B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^\top \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Normalekvationen $B^\top B\mathbf{x} = B^\top \mathbf{v}$ ger dig därför

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = B\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

får du till sist att $\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\| = \sqrt{16+4+1+2} = 5$ som är avståndet mellan $\mathbf{v}$ och nollrummet till A.

Svar: 5.

5. (a) För att visa att H är ett delrum ska vi visa att nollpolynomet är med i H och att H är sluten under addition samt multiplikation med skalär.
   i. Eftersom nollpolynomet har nollpolynomet som derivata är de båda noll i alla punkter och därför ligger nollpolynomet i H.
   ii. Anta att $p(t)$ och $q(t)$ ligger i H. Det betyder att $p(2) = p'(2) = 0$ och att $q(2) = q'(2) = 0$, vilket ger $(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0$. Eftersom $(p+q)'(t) = p'(t) + q'(t)$ gäller att $(p+q)'(2) = p'(2) + q'(2) = 0$. Det ger att $p(t) + q(t)$ är med i H.
   iii. Anta att $p(t)$ ligger i H och c är en skalär. Då gäller $p(2) = p'(2) = 0$. Eftersom $(cp)(t) = cp(t)$ gäller att $(cp)'(t) = cp'(t)$ och därmed att $(cp)(2) = 0$ och att $(cp)'(2) = cp'(2) = 0$, vilket visar att $cp(t)$ ligger i H.

   (b) Att $p(t) \in H$ betyder att $p(t)$ är av grad högst fyra och har nollstället 2 och därför enligt faktorsatsen är av formen $p(t) = (t-2)q_1(t)$ för nåt polynom $q_1(t)$ av grad högst tre. Dervering ger

$$p'(t) = q_1(t) + (t-2)q_1'(t)$$

som ger $0 = p'(2) = q_1(2)$ och därför är $q_1(t) = (t-2)q(t)$ där $q(t)$ har grad högst två. Detta ger dig att de polynom som ligger i H är de av formen

$$p(t) = (t-2)^2(c_1\,t^2 + c_2\,t + c_3) = c_1\,t^2(t-2)^2 + c_2\,t(t-2)^2 + c_3\,(t-2)^2$$

där c_1, c_2, c_3 är godtyckliga skalärer. Polynomen
$p_1(t) = t^2(t-2)^2$, $p_2(t) = t(t-2)^2$, $p_3(t) = (t-2)^2$ spänner därför ut H. De är linjärt oberoende eftersom p_1 har grad 4, p_2 grad 3 och p_3 grad 2.

Svar: En bas för H ges av $\mathcal{B} : t^2(t-2)^2,\ t(t-2)^2,\ (t-2)^2$.

(c) Eftersom integralen som ger T är över ett symeteriskt intervall runt 0 gäller att $T(t^{2k+1}) = 0$ och $T(t^{2k}) = 2\int_0^1 t^{2k}\,dt = 2/(2k+1)$. Använder du detta och utvecklar p_1, p_2, p_3 får du

$$\begin{aligned} T(t^2(t-2)^2) &= T(t^4) + 4T(t^2) = \frac{2}{5} + \frac{8}{3} = \frac{46}{15} \\ T(t(t-2)^2) &= -4T(t^2) = -\frac{8}{3} = -\frac{40}{15} \\ T((t-2)^2) &= T(t^2) + 4T(1) = \frac{2}{3} + 8 = \frac{130}{15} \end{aligned}$$

Polynomet $c_1\,p_1 + c_2\,p_2 + c_3\,p_3$ ligger därför i kärnan till T precis när

$$0 = T(c_1\,p_1 + c_2\,p_2 + c_3\,p_3) = \frac{1}{15}\Big(46c_1 - 40c_2 + 130c_3\Big) = \begin{pmatrix} 46 & -40 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{c}\,.$$

En bas för nollrummet till A ges av

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 65 \\ 0 \\ -23 \end{pmatrix}$$

Det betyder att en bas för $\operatorname{Ker} T$ ges av $\mathcal{B} : t(t-2)^2(20t+23),\ (t-2)^2(65t^2-23)$.

Svar: (T.ex.) $\mathcal{B} : t(t-2)^2(20t+23),\ (t-2)^2(65t^2-23)$.

6. (a) När $A = I_2$ och $c = 2$ gäller att

$$\begin{aligned} \det(c\,A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \\ c\det(A) &= 2 \cdot 1 \neq \det(c\,A) \end{aligned}$$

så påståendet stämmer inte.

Svar: Det stämmer inte.

(b) När $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\ldots$, $\mathbf{u}_p$ är en ortogonalbas för delrummet gäller att standardmatrisen för ortogonal projektion på det ges av $U \cdot U^\top$ där

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_p \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$(U \cdot U^\top)^\top = (U^\top)^\top U^\top = U \cdot U^\top$$

är $U \cdot U^\top$ symmeterisk. Påståendet stämmer alltså.

Svar: Det stämmer.

(c) Normalekvationen $A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{y}$ är lösbar för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, men $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ har lösning bara när $y \in \operatorname{Col} A$. När rangen av A är $< m$ finns $\mathbf{y}$ som inte ligger i $\operatorname{Col} A$. Påståendet stämmer alltså inte.

Svar: Det stämmer inte.