Lösningar till MVE022 Linjär algebra för I1 19-10-12

1. (a) Vektorerna är ortogonala precis när $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$. Du har att

$$0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ h \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ -2 \\ h \end{pmatrix} = -2 + h^2 - 4 + h = (h-2)(h+3)$$

så vektorerna är ortogonala precis när $h = 2$ och när $h = -3$,

Svar: När $h = -3$ och när $h = 2$.

(b) Du har att $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}$ och löser därför ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ där $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$. Den utökade koefficientmatrisen överför du till U på TF med radoperationer:

$$\begin{pmatrix} A \mid \mathbf{v} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{rr|r} -5 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \\ 4 & 0 & -8 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -5 \\ 0 & -8 & -24 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 7 & 21 \end{array}\right) \sim' \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = U.$$

Här ser du att lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ är $\mathbf{x}^\top = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Svar:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Sätter du $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ är orotgonala komplementet till H samma som nollrummet till $A^\top$.

För att bestämma en bas för det gör du radoperationer på $A^\top$ till U på TF som har samma nollrum som $A^\top$.

Radoperationer ger

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = U.$$

Här kan du göra på lite olika sätt för att hitta en bas. Ett är att lösa ekvationssystemet $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ett annat är att i tur och ordning sätta en fri variabel till -1 eller annat lämpligt tal $\neq 0$ och övriga till 0.

Väljer du det sista får du (t.ex.)

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -14 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: T.ex. är $\mathcal{B} : \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ en bas för ortogonala komplementet till H där

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) De tre vektorerna är linjärt oberoende precis när matrisen $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ som har dem som kolonner har tre pivotkolonner. För att bestämma vilka kolonner som är pivotkolonner utsätts A för radoperationer till U på TF.

Radoperationer ger

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & h+17 & -5 \\ -6 & 2h+4 & h+8 \\ 6 & -3h-9 & 3h-19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 23 & 3 & -2 \\ 0 & h+5 & 3 \\ 0 & 2h+10 & h+4 \\ 0 & -3h-15 & 3h-15 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & h+5 & 3 \\ 0 & 0 & h-2 \\ 0 & 0 & 3h-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & h+5 & 3 \\ 0 & 0 & h-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U\,.$$

När $h \neq -5$ är U på TF och saknar då en pivotkolonn precis när $h = 2$. När $h = -5$ är U inte på TF, men ytterligare en radoperation ger TF och andra kolonnen är då inte pivotkolonn.

Svar: När $h \neq -5$ och $h \neq 2$,

(e) En matris A är diagonaliserbar precis när

i. alla nollställen till $\det(A - \lambda I)$ är reella,

ii. dimensionen av egenrummet är samma som egenvärdets multiplicitet för varje egenvärde.

För A gäller att egenvärdena är elementent längs diagonalen eftersom matrisen är triangulär. De är alltså 1 och 2 som är olika. Därför har $\mathbb{R}^2$ en bas av egenvektorer till A och A är diagonaliserbar.

För B gäller att

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda+2)(\lambda-7).$$

Eftersom B är en 2×2-matris med två olika egenvärden (-2 och 7) är B diagonaliserbar.

Matrisen C är triangulär och har bara egenvärdet 2. Egenrummet till 2 är nollrummet till matrisen $C - 2I$ och den är

$$C - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som är på TF med én pivotkolonn. Alltså har egenrummet dimension 1 medan 2 har multiplicitet 2 som nollstället till C :s karaktäristiska polynom.

Svar: Matriserna A och B är diagonaliserbara.

(f) När A är inverterbar kan elementet på position (i, j) i A^{-1} beräknas enligt formeln

$$\frac{(-1)^{i+j}\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

där A_{ji} är den matris som fås från A gnom att stryka rad j och kolonn i.

Med räkneregler för determinanter har du

$$\det(A_{21}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -h & -1 & -2 \\ h-6 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4-h & 1 & -2 \\ h+4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2(h+4).$$

Detta ger dig att det sökta elementet i A^{-1} är

$$\frac{-(-2)(h+4)}{6h} = \frac{h+4}{3h}.$$

Svar: $(h+4)/(3\,h)$.

2. Du har att $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Den första likheten ger dig

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Det ger dig ekvationen $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ vars lösning är $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Systemets utökade koefficientmaris överför du till U på TF med radoperationer och löser sen det system du då får.

Radoperationer ger dig

$$\begin{pmatrix} B \mid \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 36 \\ -3 & -4 & 4 & 24 \\ -3 & 3 & 0 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & -5 & 2 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \end{pmatrix}$$

Du får

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3. Sätter du $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ är ortogonala komplementet till H samma som nollrummet till $A^\top$. Du bestämmer först en bas för detta genom att överföra A till U på TF och löser $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Radoperationer ger dig

$$A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Här kan du bestämma en bas för nollrummet genom att i tur och ordning sätta én fri variabel till nåt lämpligt $\neq 0$ och övriga till 0. Gör du det får du

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Det betyder att $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ är en bas för orotgonala komplementent till H. Nu vill du göra om den till en ortogonalbas för H. Det blir lättast om du sätter

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{w}_2\\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\cdot \mathbf{u}_1\end{aligned}$$

Du får då

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 0\\ 5\end{pmatrix}\\ \mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} -17\\ 6\\ 10\\ 0\end{pmatrix} - \frac{-51-24}{50}\cdot\begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 0\\ 5\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -34+9\\ 12-12\\ 20\\ 15\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} -5\\ 0\\ 4\\ 3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Svar: (T.ex.) $\mathcal{B} : \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ där

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 0\\ 5\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -5\\ 0\\ 4\\ 3\end{pmatrix}.$$

4. Sätter du $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ och bestämmer en lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till $A^\top A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ har du att $\hat{\mathbf{v}} = A\hat{\mathbf{x}}$ är den vektor i $H = \operatorname{Col} A$ som ligger närmast $\mathbf{v}$.

   Du får att

$$\begin{aligned}A^\top A &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 6 & -2\\ -2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -17\\ -17 & 9\end{pmatrix}\\ A^\top \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 8\\ -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12\\ 20\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Du löser nu ekvationen $A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{v}$ genom att överföra den utökade koefficeintmatrisen till TF för att få ett system som du lätt kan lösa.

   Radoperationer ger

$$\begin{aligned}\left(A^\top A \mid \mathbf{v} \right) &= \left(\begin{array}{cc|c} 45 & -17 & -12\\ -17 & 9 & 20\end{array}\right) \sim \{\text{ Förbereder }\} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 10 & 48\\ -17 & 9 & 20\end{array}\right) \sim\\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 24\\ 1 & -21 & -124\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -21 & -124\\ 0 & -58 & -348\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -21 & -124\\ 0 & 1 & 6\end{array}\right) \sim\\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 6\end{array}\right).\end{aligned}$$

Detta ger dig $\hat{\mathbf{x}}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$ och

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Svar: Den vektor i H som ligger närmast $\mathbf{v}$ är $\hat{\mathbf{v}}^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

5. (a) Du sätter $\mathbf{x}_k^\top = \begin{pmatrix} a_k & b_k & c_k \end{pmatrix}$ där a_k, b_k och c_k är antalet hushåll som använder fabrikaten A, B respektive C månad k.
Marknadsundersökningen ger dig att

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k .$$

Sätter du matrisen ovan till A har du alltså $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ som ger dig att $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$.
Om du lyckas hitta en bas $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till A med tillhörande egnevärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ har du dels att $\mathbf{x}_0$ kan skrivas

$$\mathbf{x}_0 = c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3,$$

där c_1, c_2, c_3 är $\mathbf{x}_0$:s koordinater i basen $\mathcal{B}$, dels att

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= A^k(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3) = c_1\,A^k\mathbf{v}_1 + c_2\,A^k\mathbf{v}_2 + c_3\,A^k\mathbf{v}_3 = \\ &= c_1\,\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\,\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + c_3\,\lambda_3^k\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Du söker därför en bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till A och börjar med att bestämma egenvärden till A. De är de reella nollställena till A:s karaktäristiska polynom $\det(A - \lambda I)$ som du nu bestämmer

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3/4-\lambda & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4-\lambda & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{ Sätter } 12\lambda = \mu \ \} = \\ &= \frac{1}{12^3} \begin{vmatrix} 9-\mu & 6 & 4 \\ 0 & 3-\mu & 4 \\ 3 & 3 & 4-\mu \end{vmatrix} = \frac{1}{12^3} \begin{vmatrix} 12-\mu & 12-\mu & 12-\mu \\ 0 & 3-\mu & 4 \\ 3 & 3 & 4-\mu \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{12^3} \cdot (12-\mu) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\mu & 4 \\ 3 & 3 & 4-\mu \end{vmatrix} = \frac{1}{12^3} \cdot (12-\mu) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\mu & 4 \\ 3 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{12^3} \cdot (12-\mu)(\mu^2 - 4\mu + 3) = \frac{1}{12^3} \cdot (12-\mu)(\mu-1)(\mu-3) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1/12)(\lambda - 1/4) \end{aligned}$$

Du ser nu att egenvärden är $\lambda_1 = 1/12$, $\lambda_2 = 1/4$ och $\lambda_3 = 1$. Eftersom A är en 3×3-matris med tre olika egenvärden har $\mathbb{R}^3$ en bas av egenvektorer till A. Varje egenrum har dimension 1 eftersom varje egenvärde har multiplicitet 1 som

nollställe till $\det(A - \lambda I)$. Egenvektorer som hör till olika egenvärden är linjärt oberoende, så du behöver en nollskild egenvektor i varje egenrum. Egenrummet till egenvärdet λ är samma som nollrummet til $A - \lambda I$.
De bestämmer du nu med radoperationern på $A - \lambda I$ till U på TF.
Du har

$$\begin{aligned}
A-(1/12)I &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A-(1/4)I &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A-I &= \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -3/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & -2/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 0 & -9 & 4 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & -8 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Detta ger dig egenvektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

som hör till egenvärdena 1/12, 1/4 respektive 1.
En formel för $\mathbf{x}_k$ är därför

$$\mathbf{x}_k = c_1(1/12)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(1/4)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$\mathbf{x}_k = c_1(1/12)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(1/4)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Formeln i (a) ger att

$$\mathbf{x}_k \to c_3 \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

när $k \to \infty$.
Du behöver därför bestämma c_3 och har när $k = 0$ att

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Radoperationer på utökad koefficientmatris ger dig

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 & a \\ -2 & -1 & 4 & b \\ 1 & 0 & 9 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 & a \\ 0 & 1 & 44 & 2a+b \\ 0 & -1 & -11 & c-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 & a \\ 0 & 1 & 44 & 2a+b \\ 0 & 0 & 33 & a+b+c \end{pmatrix}.$$

Du får alltså $c_3 = (a+b+c)/33$ och långsktigt därför

$$(a+b+c)\begin{pmatrix} 20/33 \\ 4/33 \\ 9/33 \end{pmatrix}.$$

Svar: A:s marknadsandel blir 20/33, B:s 4/33 och C:s 9/33.

6. (a) Vektorn $\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ som är ortogonal mot $\mathbf{v}_3^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ men $\mathbf{v}_1$ är inte ortogonal mot $\mathbf{v}_3$.

   Svar: Påståendet stämmer inte.

   (b) Om $\mathbf{x}_0$ är en lösning till $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så är $AB\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Förutsättningen är att $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har den triviala lösningen, så $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Det betyder att $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har den triviala lösningen.

   Svar: Påståendet stämmer.

   (c) Summan i varje kolonn kan beräknas genom multiplikation med vektorn $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ på en matris M från vänster: ϵM blir en radvektor vars koordinater är de olika kolnnernas summa i M

   Förutsättningarna är att $\epsilon A = \epsilon$ och att $\epsilon B = \epsilon$.

   Detta ger
   $$\epsilon(AB) = (\epsilon A)B = \epsilon B = \epsilon.$$

   Svar: Påståendet stämmer.