Tentamen
MVE021 Linjär algebra I

140603 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Dawan Mustafa, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt W vara underrummet till $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationerna

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0.$$

(i) Bestäm en bas för W och ortogonalisera den. (4p)

(ii) Bestäm vektorn i W som har minsta avstånd till vektorn $(3, 1, -5, 1)$ och beräkna också detta avstånd. (2p)

3. (i) Låt A vara en 4×6 matris. Är matrisen $A^T A$ inverterbar? Motivera väl! (2p)

(ii) Lös matrisekvationen (4p)

$$A^T AX = BX + C$$

där $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (i) Ge ett exempel på en 2×2 matris som INTE är diagonaliserbar. Motivera väl! (2p)

(ii) Genom att använda diagonalisering, lös följande system av differentialekvationer (4p)

$$\begin{array}{rcll} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & +3x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) & +x_2(t) \end{array}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (i) Visa att varje mängd bestående av fler vektorer än som finns i en bas för ett vektorrum är linjärt beroende och att antalet vektorer i en bas är entydigt bestämt. (3p)

(ii) Låt U vara underrummet till $\mathbb{P}_2$ som spänns upp av polynomen $p_1 = 1 + 2t + t^2$, $p_2 = 1 + t$, $p_3 = 2 + t - t^2$, $p_4 = 1 - 2t - 3t^2$. Bestäm en bas för U och komplettera den till en bas för $\mathbb{P}_2$. (3p)

6. Betrakta avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ given av (6p)

$$T(a + bt + ct^2) = (a + 2c) + 3bt + (2a + c)t^2.$$

Bestäm en bas till $\mathbb{P}_2$ sådan att matrisen till T relativt denna bas är diagonal.

7. Visa följande:

(i) Determinanten av en ortogonal matris är ± 1 och en produkt av två ortogonala matriser är också ortogonal. (2p)

(ii) Om A är en ortogonal $n \times n$ matris, så gäller $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (2p)

(iii) Låt A vara en ortogonal 3×3 matris med determinant 1. Visa att $\det(A - I) = 0$. (2p)

Lycka till!
Iulia Pop

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 140603	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$ består av vektorerna $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ för $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet av följande matris (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(c) För vilka reella a ligger vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ a \\ -11 \end{bmatrix}$ i samma plan? (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är sådan att $F(1,1) = (-1,1)$ och $F(1,2) = (1,1)$. Bestäm matrisen för F i standardbasen. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm linjen i planet som är bäst anpassad, i minstakvradrat metodens mening, till punkterna $(-1,2)$, $(0,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....