Tentamen
MVE021 Linjär algebra I

140825 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: doktorand , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt W vara underrummet till $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationerna

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

(i) Bestäm en bas för W och ortogonalisera den. (4p)

(ii) Bestäm vektorn i W som har minsta avstånd till vektorn $(3, -2, 0, 3)$ och beräkna också detta avstånd. (2p)

3. (i) Låt A vara en kvadratisk matris sådan att $I - A^2$ är inverterbar. Visa att $A + I$ är också inverterbar. (2p)

(ii) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen (4p)

$$X + A^2(I - X) = A + I.$$

4. (i) Visa att om en kvadratisk matris A är både diagonaliserbar och inverterbar, så är A^{-1} också diagonaliserbar. (2p)

(ii) Låt (4p)

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna gränsvärdet av A^k då $k \to \infty$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (i) Definiera begreppet *bas* för ett vektorrum. (3p)

Låt $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ vara linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bestäm dimensionen av det underrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,\ldots$, $\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1$.

(ii) Ange alla reella tal a sådana att följande polynom INTE utgör en bas i $\mathbb{P}_2$: (3p)

$$q_1 = a + t - t^2,\ q_2 = -1 + t + at^2,\ q_3 = a + 2t + 2t^2.$$

6. Visa att avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ som definieras av (6p)

$$T(p(t)) = tp'(t) + p(t+1)$$

är linjär. Bestäm en bas till $\mathbb{P}_2$ sådan att matrisen till T relativt denna bas är diagonal.

7. Visa följande påståenden:

(i) Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en injektiv linjär avbildning, så är $n \leq m$. (3p)

(ii) Om A är en $m \times n$ matris och B en $n \times p$ matris, så är $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$ och $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(B)$. (3p)

Lycka till!
Iulia Pop

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 140825	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Betrakta följande bas $\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm determinanten av ABA^{-1} där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet av följande matris (4p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller $T(1,1) = (3,2)$ och $T(1,-1) = (5,0)$. Beräkna standardmatrisen till T och bilden av $(2,1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm linjen i planet som är bäst anpassad till punkterna $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,8)$, i minsta kvadratmetodens mening. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Liten ordlista för I1: Linjär algebra

Engelska	**Svenska**
adjugate	adjungerad
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation)
basic variable	basvariabel
basis	bas
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
domain	definitionsmängd
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv , på
overdetermined	överbestämt
range	värdemängd
rank	rang
row space	radrum
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation,avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unit vector	enhetsvektor
unique	entydigt bestämd
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero (vector)	noll(vektor)