Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik för I, kurskod MVE021, torsdag f.m. 20150416

Ansvarig lärare Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5892
telefonvakt John Bondestam, tel 0703 088 304

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsamman med övriga lösningar.

2. Givet matriserna

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Visa att

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2p

   (b) Bestäm inversen till $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. 4p

3. Givet matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

   (a) Bestäm egenvärdena till matrisen. 3p

   (b) Är matrisen $\boldsymbol{A}$ diagonaliserbar? Uträkningar behövs inte. Det räcker att motivera! 3p

4. Betrakta mängden U av de $x \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, som uppfyller $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

   (a) Visa att U är ett underrum till $\mathbb{R}^3$ och bestäm en ortogonal bas till U. 3p

   (b) Bestäm den vinkelräta projektionen av $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ på underrummet U. 3p

Överbetygsdelen

5. (a) Förklara varför kolonnerna i matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende. 2p

   (b) Argumentera/bevisa att för n vektorer $\boldsymbol{v}_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$ med $m < n$, är vektorerna linjärt beroende. 4p

6. Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ är given.

   (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till $\boldsymbol{A}$. 1p

   (b) Lös följande system av differentialekvationer. 5p

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &+ 3x_1(t) + 4x_2(t) = 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{cases} x_1(0) = 100 \\ x_2(0) = 150 \end{cases}$$

7. Givet en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ av typ $n \times n$. Bevisa att följande påståenden är ekvivalenta.

   (a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ existerar.

   (b) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

   (c) $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$.

   (d) Matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning $\boldsymbol{x}$.

6p

Uppgift 1 i Godkäntdelen

1. (a) Lös matrisekvation $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{X}$, där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2p

Lösning

(b) Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ är given. För vilka högerled $\boldsymbol{b}$ har $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ingen, unik respektive oändligt med lösningar?
Ange lösningsmängden $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, om $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 3p

Lösning

(c) Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm determinanten av $\boldsymbol{A}$. 3p

Lösning

(d) Bestäm $LU-$faktoriseringen av $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 3p

Lösning

(e) Bestäm dimensionen av radrummet, kolonnrummet och nollrummet, samt en bas till radrummet till $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. 3p

Lösning