Tentamen för I-programmet i Linjär algebra, MVE021, 20150604, 08.30-12.30

Program	I	Kurs	MVE 021
Tentamensdatum	20150604	Tid	08.30-12.30
Hjälpmedel	Inga		
Examinator	Reimond Emanuelsson	tel	772 5892

1. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Beräkna determinanten av $\boldsymbol{A}$.

   (b) Beräkna inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$.

   3p, 3p

2. Givet matriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Antag att de är kvadratiska av samma ordning med $\det \boldsymbol{C} = 14$ och $\det \boldsymbol{B} = 2$.

   (a) Bestäm determinanten av $\boldsymbol{A}$ och determinanten av $\boldsymbol{B}^{-1}$.

   (b) Uttryck matrisen $\boldsymbol{A}^{-1}$ i matriserna $\boldsymbol{C}^{-1}$ och $\boldsymbol{B}$.

   3p, 4p

3. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$.

   (a) Bestäm dimensionen av matrisens radrum och nollrum.

   (b) Bestäm en bas för radrummet och nollrummet.

   (c) Bestäm $LU-$faktoriseringen av $\boldsymbol{A}$.

   2p, 5p, 2p

4. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Visa att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$.

   (b) Lös ekvationen approximativt med minsta kvadratmetoden.

   (c) Beräkna medelfelet.

   1p, 4p, 2p

5. Betrakta följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ 2x_1(t) + 3x_2(t) = x_2'(t) \end{cases} .$$

   (a) Lös systemet.

   (b) Bestäm den lösning som uppfyller villkoren att
   $x_1(0) = 3$ och $x_2(0) = 0$.

   5p, 2p

6. Givet den kvadratiska formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3.$$

   (a) Visa att den kvadratiska formen är positivt definit.

   (b) Vilken typ av andragradsyta är $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$?

   4p, 1p

7. (a) Förklara vad som menas med att vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ är linjärt beroende.
   Avgör om $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende eller ej.

   (b) Definiera begreppet transponatmatris och bevisa att
   $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$ för matriser av lämpliga typer.

   4p, 5p