MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-06-02 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
ankn 5325

MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T. A. räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i minsta kvadratmening då $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)

(b) Hur stort blev minsta kvadrat felet? (2p)

(c) Kontrollera att felvektorn $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ är ortogonal mot kolonnerna i A om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen. (2p)

3. (a) Bestäm en bas för kolonnrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & 8 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. (2p)

(b) Bestäm dimensionen för kolonnrummet respektive nollrummet för matrisen A. (1p)

(c) Bestäm en ortogonal bas för kolonnrummet till matrisen A. (3p)

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 6x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 3$. (5p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar med bevis, motexempel eller hänvisning till sats. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är $m \times n$ matris och C är $n \times m$ matris så att $CA = I_n$ så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast trivial lösning. (1p)

(b) Om $A \sim B$ är radekvivalenta $n \times n$ matriser, så har A och B samma egenvärden. (1p)

(c) Om A och B är $n \times n$ matriser med $n \geq 2$ så är $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. (1p)

(d) Matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 9 \\ 7 & 0 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar. (1p)

6. Låt $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4\}$ vara en ortogonal mängd i $\mathbb{R}^5$. Antag dessutom att ingen av vektorerna i S är nollvektorn. Bevisa att S är en linjärt oberoende mängd. (6p)

7. Låt Q vara den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$.

(a) Förklara vad som menas med att en kvadratisk form är positivt definit. (1p)

(b) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, eller indefinit. (3p)

(c) Bestäm nya variabler y_1, y_2, y_3 så att Q uttryckt i de nya variablerna saknar korstermer, och uttryck de nya variablerna i de gamla. (4p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 2016-06-02	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 7 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning i planet som avbildar punkten $(1,1)$ på $(2,1)$ och avbildar punkten $(0,2)$ på punkten $(4,-2)$. Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Lös matrisekvationen $X = B + AX$ då $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Lösning: (3p)

Svar: ....

(e) För vilket värde på a är vektorerna $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ linjärt beroende?

Lösning: (3p)