MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-08-22 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Olof Giselsson
ankn 5325

MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T.A. från 2016 räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (12p)

2. Låt W vara nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm dimensionen för nollrummet och kolonnrummet till matrisen A. (1p)

(b) Bestäm en bas för W. (2p)

(c) Bestäm en ortogonal bas för W. (3p)

(d) Skriv vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ som $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|} + \mathbf{u}_{\perp}$ där $\mathbf{u}_{\|} \in W$ och $\mathbf{u}_{\perp} \in W^{\perp}$. (2p)

3. (a) Förklara vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden $y = a + bt$ till följande mätdata (4p)

t	-1	0	2	3
y	0	2	3	2

.

(c) Hur stort blev approximationsfelet vid $t = 2$? (1p)

4. (a) Lös följande system av differentialekvationer (5p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 4x_1(t) & + & 5x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & - & 2x_2(t) \end{cases}$$

(b) Är origo en källa (source), sänka (sink), sadelpunkt eller spiralpunkt? (1p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar med bevis, motexempel eller hänvisning till sats. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en diagonaliserbar $n \times n$ matris så är A inverterbar. (1p)

(b) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till matrisen A, så är $\mathbf{v}$ egenvektor till A^k för alla heltal $k \geq 0$. (1p)

(c) Om U är en kvadratisk matris och $U^T U = I$, då är $\det(U) = \pm 1$. (1p)

(d) Om A är en 2×3 matris och avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är surjektiv, så är T injektiv. (1p)

(e) Om A och B är matriser sådana att $AB = 0$, då måste $A = 0$ eller $B = 0$. (1p)

6. Låt U vara en $m \times n$ matris med ortonormala kolonner. Bevisa att $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ och $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. (6p)

7. (a) Bestäm en ortogonal diagonalisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. (5p)

(b) Beräkna A^k för alla heltal $k \geq 1$. (2p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 2016-08-22	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen med $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $T(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. (3p)

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(c) Lös matrisekvationen $A^TAX - B = X$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) För vilket värde på a ligger vektorerna $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ i samma plan?

Lösning: (3p)

Svar: ....