MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-10-08 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
ankn 5325

MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T.A. från 2016 räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (12p)

2. Låt $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm med hjälp av diagonalisering A^k då $k \to \infty$. (5p)

3. Låt $W = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm dimensionen för W. (1p)

(b) Ange n stycken linjärt oberoende vektorer i W, där n är svaret på (a) uppgiften. (2p)

(c) Bestäm en ortogonal $\mathcal{B}$ bas för W. (3p)

(d) Skriv ortogonalprojektionen $\mathbf{u}_{||}$ av $\mathbf{u}$ på W i basen $\mathcal{B}$, dvs. $[\mathbf{u}_{||}]_{\mathcal{B}}$. (2p)

4. Låt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. (1p)

(b) Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4p)

(c) Vad blev minstakvadratfelet. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar med bevis, motexempel eller hänvisning till sats. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en $n \times n$ matris, med egenvärde λ så är avbildningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som ges av $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x}$ injektiv (one-to-one). (1p)

(b) Om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är 3λ egenvärde till matrisen $3A$. (1p)

(c) Avbildningen $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3 + 1, -x_1 - 2)$ är linjär. (1p)

(d) Om A är en $n \times (n + 1)$ matris så är $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 1$. (1p)

(e) Om $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en vridning kring en axel $\mathbf{v}$ så är T surjektiv (onto). (1p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Bevisa att $(\mathrm{Col}\, A)^{\perp} = \mathrm{Nul}\, A^T$. (5p)

7. Låt Q vara den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2)$.

(a) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, eller indefinit. (3p)

(b) Bestäm nya variabler y_1, y_2, y_3 så att Q uttryckt i de nya variablerna saknar korstermer, och uttryck de nya variablerna y_1, y_2, y_3 i variablerna x_1, x_2, x_3. (5p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I 2016-10-08	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en LU-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Vektorerna $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ utgör en bas $\mathcal{B}$. Låt $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v}$ relativt basen $\mathcal{B}$. (3p)

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(c) Låt A och B vara matriser så att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Beräkna $(AB)^{-1}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Lösning: (3p)

Svar: ....