MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i Linjär algebra för I1, (MVE021)
Tid: 2017-06-01, kl 8.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Ivar Simonsson, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från våren 2017 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 2/6.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve021/1617/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

a) Bestäm h så att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till matrisen A när (2p)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & h & 1 \\ 2 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är bas för delrummet H till $\mathbb{R}^4$. Vektorn $\mathbf{b}$ ligger i H. Bestäm koordinatvektorn för $\mathbf{b}$ relativt basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^T, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 21 & -14 \end{pmatrix}^T.$$

c) Finns det ett värde på h så att vektorerna (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 17 & 9 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2+h & h \end{pmatrix}^T,$$

är linjärt beroende? Vilket är i så fall detta värde?

d) Bestäm h så att produkten AB har determinanten -48, när (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

e) Matrisen A nedan är inverterbar. Bestäm inversen till A. (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 13 & -11 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

f) För vilka värden på h är matrisen A nedan inverterbar: (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 2h-16 & 2+h & 3 \\ 3h-24 & 5+h & -1 \\ h-8 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & -6 & -7 & -2 & -15 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2h \\ -2+h \\ h \end{pmatrix}.$$

a) Betäm en bas för kolonnrummet till matrisen A. (4p)

b) För vilket, eller vilka, värden på h ligger $\mathbf{v}$ i kolonnrummet till A? (2p)

3. Lös följande system av differentialekvationer: (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = -18x_1(t) - 7x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -2 \end{cases}.$$

4. Bestäm kortaste avståndet mellan vektorn $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T$ och en vektor i $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där (6p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

5. Om den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ vet man att $T(1) = -3 - 8t + 5t^2$, $T(t) = 2 + 5t - 7t^2$ och att $T(t^2) = 2t^2$. Avgör om det går att bestämma en bas för $\mathbb{P}_2$, så att matrisen för T relativt denna bas är diagonal. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange " sant" eller "falskt" ger ingen poäng. (6p)

a) Om kolonnrummet till 5×7-matrisen A har dimensionen 3, så har nollrummet till A dimension 2.

b) Om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är en orotgonal bas för ett delrum H till $\mathbb{R}^n$, så kan den utvdigas till en ortogonal bas $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$.

c) Om det för $n \times n$-matrisen A gäller att $A^2 = A$, så kan A högst ha två olika egenvärden.

7. Visa att en uppsättning egenvektorer till matrisen A, som alla hör till olika egenvärden, är linjärt oberoende. (6p)

JAS