MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i Linjär algebra för I1, (MVE021)
Tid: 2017-08-19, kl 8.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Adam Malik, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från våren 2017 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 20/8.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve021/1617/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

   a) För vilket, eller vilka, värden på h är vektorerna $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & h & -1 & h \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & h \end{pmatrix}^T$ ortogonala? (2p)

   b) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ är bas för delrummet H till $\mathbb{R}^4$. Vektorn $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T$ ligger i H. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{b}$ i denna bas. (2p)

   c) För vilket, eller vilka, värden på h saknar matrisen (2p)

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & h & 0 \\ 2 & h & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   invers?

   d) För vilket, eller vilka, värden på h är vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 & 13 & h & -8 \end{pmatrix}^T$ linjärt beroende? (2p)

   e) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ är bas för delrummet H till $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ortogonalbas för ortogonala komplementet $H^\perp$ till H. (3p)

   f) Matrisen A nedan är inverterbar. Bestäm inversen till A. (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

---

2. a) Bestäm dimensionen av nollrummet till matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2h+6 & 1+3h & 2h-4 \\ 5 & -15-3h & -13-2h & 10-3h \\ 2 & -6 & h-7 & 4 \end{pmatrix}$$

för olika värden på h.

b) För vilka h ligger $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ i nollrummet till A? (2p)

3. Två farbrikat, A och B, dominerar helt marknaden för en produkt. Efter en marknadsundersökning vet man att $5/6$ av de som använder A en månad använder B nästa, och att $1/3$ av de som använder B en månad använder A nästa. Om a konsumenter använder A och b använder B, hur många använder då A respektive B n månader senare. (Utgå från att resultatet från marknadsundersökningen inte förändras med tiden.) (6p)

4. a) Bestäm en ortogonalbas för kolonnrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$ på kolonnrummet till A (2p)

c) Bestäm kortaste avståndet mellan $\mathbf{v}$ och kolonnrummet till A. (1p)

5. Bestäm standardmatrisen för ortogonal projektion på ortogonala komplementet till $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}^T$. (6p)

Var god vänd!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange " sant" eller "falskt" ger ingen poäng. (6p)

   a) Om 0 inte är ett egenvärde till A, så är A inverterbar. (A är en kvadratisk matris.)
   b) Om matrisen A har en pivotposition på varje rad, så är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar (konistent) för varje $\mathbf{b}$.
   c) Antag att A och B är $n \times n$-matriser. Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till AB, så är $\mathbf{v}$ en egenvektor till minst en av A eller B.

7. Låt A vara en symetrisk matris. Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden för A är ortogonala. (6p)

JAS