MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i Linjär algebra för I1, (MVE021)
Tid: 2017-10-07, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Sandra Eriksson Barman, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från våren 2017 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 9/10.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve021/1617/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

   a) Bestäm en bas för nollrummet till matrisen A. (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1/7)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = (1/7)\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ (2p) är en ortonormalbas för delrummet H till $\mathbb{R}^4$. Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 & 7 \end{pmatrix}^T$ på H.

   c) För vilket eller vilka värden på h är de fyra vektorerna (2p)
   $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$,
   $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 & -10 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1-h & -3 & h \end{pmatrix}^T$ linjärt beroende?

   d) Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}^T$ är en egenvektor till A. Bestäm $A^6\mathbf{v}$. (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

   e) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ är bas för delrummet H till $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ortogonalbas för ortogonala komplementet $H^\perp$ till H. (3p)

   f) Matrisen A nedan är inverterbar. Bestäm inversen till A. (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

---

2. a) Bestäm h så att $\dim(\mathrm{Col}(A)) < 3$, när (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2+h & 0 \\ 2 & 11+3h & 13+h \\ 2 & -1-h & 13-h \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm dimensionen av $\mathrm{Col}(A)$ för varje värde på h. (2p)

3. Lös följande system av differentialekvationer: (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 6x_1(t) + x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -3 \end{cases}.$$

4. Bestäm kortaste avståndet mellan vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T$ och en vektor i nollrummet till matrisen (6p)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Avgör om matrisen A är diagonaliserbar eller ej. Motivera noga. (6p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange ” sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

a) Om λ är ett egenvärde till A, så är 7λ ett egenvärde till $7A$.

b) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A, så är $6\mathbf{v}$ en egenvektor till $6A$.

c) Antag att A är en $m \times n$-matris. Om det för något $\mathbf{b}$ gäller att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har precis en lösning, så är $n \leq m$.

7. Visa att om vektorrummet V har en bas med p stycken vektorer, så har varje annan bas för V också p vektorer. (6p)

JAS