MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE022 Linjär algebra för I1.
Tid: 2018-05-31, kl 8.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Ivar Simonsson, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Bonuspoäng från våren 2018 inkluderas.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 1/6.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve022/1718/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

   a) Bestäm h så att $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$ en egenvektor till matrisen (2p)

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & h \\ 4 & h & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) För vilka värden på h utgör de fyra vektorerna (2p)

   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ -1 \\ h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \\ h \end{pmatrix},$$

   en bas för $\mathbb{R}^4$?

   c) Bestäm en bas för kolonnrummet till matrisen (2p)

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -6 & 7 & -7 \\ -1 & -2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   d) Bestäm en ortogonalbas för delrummet $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ till $\mathbb{R}^5$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$. (2p)

   e) För vilka värden på h saknar matrisen (3p)

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & h+1 \\ 9 & h+2 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & h & -2 \\ h & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   invers?

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

f) Matrisen A nedan är inverterbar. Bestäm inversen till A. (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Lös det diskreta dynamiska systemet (6p)

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} & = & A\mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_0 & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases}, \quad \text{där} \qquad A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}.$$

Svara med formler för koordinaterna för $\mathbf{x}_k$.

3. Låt $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$. Bestäm den vektor i H som ligger närmast $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}^T$ och avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H. (6p)

4. Bestäm standardmatrisen för ortogonal projektion på delrummet $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 & 14 \end{pmatrix}^T$. (6p)

5. Låt $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst tre, samt nollpolynomet. Definiera $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ enligt $T(p(t)) = tp''(t) - 2p(t+1)$.
   a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)
   b) Avgör om det finns en bas för $\mathbb{P}_3$, sån att matrisen för T med avseende på denna är diagonal. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange " sant" eller "falskt" ger ingen poäng. (6p)
   a) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A och $AB = BA$, där $B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så är $B\mathbf{v}$ också en egenvektor till A.
   b) Om den kvadratiska matrisen A har 0 som egenvärde, så är kolonnerna i A linjärt beroende.
   c) Om A är en $m \times n$-matris, B en $n \times m$-matris sådana att AB är inverterbar, så är även BA inverterbar.

7. Formulera och bevisa produktsatsen för determinanter. (6p)

JAS