MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE022 Linjär algebra för I1.
Tid: 2018-08-27, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anders Hildeman, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. Bonuspoäng från våren 2018 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 28/8. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve022/1718/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.x

   a) För vilket eller vilka värden på h saknar ekvationen (2p)
   $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2h-1 \\ 4 & -5 & 7-2h \\ -2 & 2 & h-2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ lösning?

   b) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning som har standardmatrisen (2p)
   $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. För vilket eller vilka värden på h ligger vektorn
   $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 8+2h & 5 & -2 \end{pmatrix}^T$ i bilden av T?

   c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}^T$ på Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$. (2p)

   d) Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Vilket egenvärde hör $\mathbf{v}$ till? (2p)

   e) Matriserna $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ är inverterbara, så deras repektive kolonner bildar två baser $\mathcal{A}$ respektive $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$. Man vet att $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$. Bestäm $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. (3p)

   f) Matrisen A nedan har deteriminant $27h$ och är därför inveterbar när $h \neq 0$. Bestäm det element i A^{-1} som då står på rad 2 och i kolonn 3. (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 8 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 15 & 9 & 1+h \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

2. Bestäm en ortogonalbas till $H^{\perp}$, där $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ samt $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$. (6p)

3. a) Vilken vektor i nollrummet till A ligger närmast $\mathbf{v}$ när (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -9 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}^T ?$$

   b) Bestäm avståndet mellan Null(A) och $\mathbf{v}$. (1p)

4. Avgör om matrisen $A = \begin{pmatrix} 6 & 22 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ -9 & -1 & 1 & 18 \\ 2 & 11 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar. (6p)

5. Mängden $M_{2,5}$ av alla 2×5-matriser är ett vektorrum med vanlig matrisaddition och multiplikation med skalär som operationer. Låt H vara mängden av alla $A \in M_{2,5}$ såna att $AB = O$ (O är nollmatrisen), där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Visa att H är ett delrum till $M_{2,5}$. (2p)

   b) Betäm dimensionen av H. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

   a) Om A är kvadratisk och $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x}$ är ortogonala för nåt $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så är 1 ett egenvärde till A

   b) Delrummet till $\mathbb{P}_4$ som består av alla polynom med nollställe i så väl 2 som 3 har dimension 3.

   c) Om A är diagonaliserbar, så är A^T också diagonaliserbar.

7. Visa att om ett vektorrum V har en bas bestående av n vektorer, så har varje annan bas för V samma antal vektorer. Formulera eventuella satser som används i beviset. (6p)

JAS