MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE022 Linjär algebra för I1.
Tid: 2018-10-13, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Carl Lundholm, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. Bonuspoäng från våren 2018 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 28/8. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve022/1718/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) För vilket eller vilka värden på h är $\mathbf{v}$ en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$, när (2p)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 25 \\ 9 \\ h \end{pmatrix}?$$

b) Hur många lösningar har ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 14x_1 + 14x_2 + (6+2h)x_3 &= 25 \\ 6x_1 + 4x_2 + (4+h)x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 6x_2 + (h+2)x_3 &= 11 \end{cases}$$

för olika värden på h?

c) Vilka kolonner i $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & -11 & -3 \\ 15 & 7 & -11 & -29 & -9 \end{pmatrix}$ är pivotkolonner? (2p)

d) Bestäm en bas för nollrummet till $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -9 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -15 \end{pmatrix}$. (2p)

e) Bestäm determinanten av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6-h & 1 \\ 1 & 6-h & 2+h \end{pmatrix}$ och ange för vilket eller vilka värden på h som A är inverterbar. (3p)

f) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. (3p)

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

2. En ekonomi består av tre sektorer A, B och C, som handlar sinsemellan för att kunna producera. Man vill sätta ett pris p_A, p_B och p_C på det som A, B repektive C producerar för den interna handeln mellan de tre sektorerna, så att ingen gör vinst eller förlust på denna. Andelen av A:s, B:s respektive C:s produktion köps enligt (6p)

	A säljer	B säljer	C säljer
A köper	1/5	1/5	1/5
B köper	1/5	2/5	3/5
C köper	3/5	2/5	1/5

Om man sätter $p_A = 1$ vad ska då p_B och p_C vara?

3. Bestäm funktionerna $x_1(t)$, $x_2(t)$ och $x_3(t)$ så att (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) + 3x_2(t) + 5x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 5x_2(t) + 5x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) + 7x_3(t) \end{cases}$$

och $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 3$, samt $x_3(0) = -1$.

4. Bestäm en ortogonalbas för $\mathbb{R}^4$ som innehåller vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$. (6p) Av lösningen ska det framgå att man räknar sig fram till resultatet med metoder från kursen.

5. Låt H vara delmängden till $\mathbb{P}_5$ som består av alla ploynom $p \in \mathbb{P}_5$, såna att $p(-1) = p(0) = p(1)$.

   a) Visa att H är ett delrum till $\mathbb{P}_5$. (1p)

   b) Bestäm en bas för H. (3p)

   c) Avbildningen $T : H \to \mathbb{R}$, som ges av $T(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$ är linjär. Bestäm en bas för kärnan till T. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

   a) Om $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala, så gäller att $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||$.

   b) Om matrisen A har pivotposition på varje rad så är den linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ injektiv.

   c) Om A är standardmatrisen för ortogonal projektion på ett delrum (av dimiension ≥ 1) till $\mathbb{R}^n$, så är A symmeterisk.

7. Visa att egenvektorer till en symmetrisk matris som hör till olika egenvärden är ortogonala. (6p)

JAS