MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE022 Linjär algebra för I1.
Tid: 2019-06-04, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Jimmy Johansson, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. Bonuspoäng från våren 2019 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 5/6. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve022/1819/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm pivotkolonnerna i matrisen (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -9 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & -3 & 7 & -7 \\ -4 & 2 & 6 & -2 & -11 \end{pmatrix}.$$

b) Betäm h så att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A när (2p)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ h & 5 & 6 \\ 14 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) Delrummet H till $\mathbb{R}^3$ har basen $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v} \in H$ när (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^\top, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 5 \end{pmatrix}^\top.$$

Bestäm $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

d) För vilket/vilka värde(n) på h är de tre vektorerna (2p)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 1-h & 8-2h & 3-h \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 3 & 7+h & -3h-10 \end{pmatrix}^\top$$

linjärt beroende?

e) Bestäm determinanten av A och avgör för vilket/vilka värde(n) på h som matrisen inte är inverterbar när (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 13-h & 9 \\ 1 & 6 & h & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

f) Bestäm en ortogonalbas för $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ när (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}^\top, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}^\top, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top.$$

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

2. a) Bestäm dimensionen av nollrummet till matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3\,h-1 & 3\,h+6 & -2\,h-15 & 11 \\ -2 & 2\,h+10 & 2\,h-4 & 2\,h-2 & -2 \\ 2 & -8 & 6 & -2\,h-4 & 6 \end{pmatrix}$$

för olika värden på h.

b) För vilket värde på h ligger $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^\top$ i nollrummet till A? (2p)

3. Bestäm $x_1(t)$, $x_2(t)$ och $x_3(t)$ så att (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -7\,x_1(t) + 6\,x_2(t) - 9\,x_3(t) \\ x_2'(t) = -3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) - 9\,x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) - 2\,x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

och $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, samt $x_3(0) = -2$.

4. Bestäm (kortaste) avståndet mellan vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 & -2 \end{pmatrix}^\top$ och nollrummet till matrisen (6p)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & -6 \\ 8 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Låt H vara delmängden till $\mathbb{P}_4$ som består av alla ploynom $p \in \mathbb{P}_4$, såna att $p(2) = p'(2) = 0$.

a) Visa att H är ett delrum till $\mathbb{P}_4$. (1p)

b) Bestäm en bas för H. (2p)

c) Avbildningen $T : H \to \mathbb{R}$, som ges av $T(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt$ är linjär. Bestäm en bas för kärnan till T. (3p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

a) När A är en $n\times n$-matris och c en skalär gäller att $\det(c\,A) = c\cdot\det(A)$.

b) Standardmatrisen för ortogonal projektion på ett delrum till $\mathbb{R}^n$ är alltid symmeterisk.

c) När A är en $m\times n$-matris och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ gäller att en lösning till $A^\top A\mathbf{x} = A^\top\mathbf{y}$ alltid också en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

7. Visa att när $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_r$ är egenvektorer till A som alla hör till olika egenvärden, så är de linjärt oberoende. (6p)

JAS