MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE022 Linjär algebra för I1.
Tid: 2019-08-26, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: , tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. Bonuspoäng från våren 2019 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 27/8. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve022/1819/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm en bas för kolonnrummet till (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 2 & 5 \\ -4 & -6 & 11 & -2 & -12 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Betäm en bas för nollrummet till (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 & -13 & -7 \\ -3 & 6 & -5 & 11 & -1 \\ -6 & 12 & -6 & 32 & 36 \end{pmatrix}.$$

c) Du vet att de två matriserna A och B är kvadratiska av samma form samt att $\det A = 20$ och $\det B = 132$. Vad är då determinanten av $A^2 B^\top A^{-1} B^{-1}$? (2p)

d) För vilket/vilka värde(n) på h är vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} h-9 & h-4 & 10 & 3h-12 \end{pmatrix}^\top$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2h+7 & 5h+23 & 3h+6 \end{pmatrix}^\top$ linjärt beroende? (2p)

e) Bestäm egenvärdena till matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

f) Bestäm inversen till matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

---

2. Bestäm en ortogonalbas för $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ där (6p)

$$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3^\top = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm funktionerna $x_1(t)$, $x_2(t)$ och $x_3(t)$ så att (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 8\,x_1(t) + 18\,x_2(t) - 12\,x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 5\,x_2(t) - 2\,x_3(t) \\ x_3'(t) &= 7\,x_1(t) + 21\,x_2(t) - 12\,x_3(t) \end{cases}$$

och $x(0) = 2$, $x_2(0) = 3$ samt $x_3(0) = 8$.

4. a) Bestäm standardmatrisen för ortogonal projektion på $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ när (4p)

$$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm avståndet mellan H i (a) och vektorn (2p)

$$\mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} -2 & 24 & -14 & 14 \end{pmatrix}.$$

5. Mängden H som består av alla polynom $p(t) \in \mathbb{P}_5$ såna att $t^5 p(1/t) = p(t)$ är ett delrum till $\mathbb{P}_5$.

a) Bestäm en bas för H. (2p)

b) Avbildningen $T : H \to H$ som ges av (4p)

$$T(p(t)) = p'(t) + t^5 p'(1/t)$$

är linjär. Har H en bas sån att T:s matris med avseende på den är diagonal? (Här betyder $p'(1/t)$ att du först beräknar $p'(t)$ och sen ersätter t med $1/t$.)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

a) Om varje kolonn i matrisen A är en pivotkolonn så är den linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ surjektiv.

b) När H är ett delrum till $\mathbb{R}^n$ av dimension p och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ är en uppsättning ortogonala vektorer (ingen av dem är nollvektorn) i H så utgör de en bas för H

c) När det karaktäristiska polynomet till en kvadratisk matris A har ett multipelt nollställe, så kan A inte vara diagonaliserbar.

7. Visa att en matris är inverterbar precis när den är radekvivalent med en identitetsmatris. (6p)

JAS