MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tentamen i MVE022 Linjär algebra för I1.
Tid: 2019-10-12, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anton Johansson, tel 772 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. Bonuspoäng från våren 2019 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast 13/10. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.
Kursens webbsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve022/1819/
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Bestäm alla värden på h så att vektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ är ortogonala där (2p)

   $$\mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} -2 & h & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^\top = \begin{pmatrix} 1 & h & -2 & h \end{pmatrix}.$$

   b) Vektorrummet H har basen $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v} \in H$ där (2p)

   $$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ för $\mathbf{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

   c) Bestäm en bas för ortogonala komplementet till delrummet $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ till $\mathbb{R}^4$ där (2p)

   $$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

   d) För vilket/vilka värde(n) på h är vektorerna (2p)

   $$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} 3 & h+17 & 2h+4 & -3h-9 \end{pmatrix},$$

   $$\mathbf{v}_3^\top = \begin{pmatrix} -2 & -5 & h+8 & 3h-19 \end{pmatrix}$$

   linjärt oberoende?

   e) Vilken eller vilka av följande matriser är diagonaliserbara? (3p)

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   f) Matrisen (3p)

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & h+2 & 1 & 0 \\ 0 & -h & -1 & -2 \\ 9 & h-6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

   har determinant $6h$ och är därför inverterbar när $h \neq 0$. Vilket är då elementet på rad 1 kolonn 2 i A^{-1}?

Var god vänd!

2. Kolonnerna i matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende och bildar därför två baser $\mathcal{A}$ respektive $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$. (6p)
Bestäm $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ när

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm en ortogonalbas för ortogonala komplementet till $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (6p)
där

$$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Vektorrummet $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Bestäm den vektor i H som ligger närmast $\mathbf{v}$ när (6p)

$$\mathbf{v}_1^\top = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Marknaden för toapapper domineras helt av tre fabrikat A, B och C. En marknadsundersökning har visat att av de hushåll som en månad använder

- A använder nästa månad inget B men en fjärdedel istället C,
- B använder nästa månad hälften A och en fjärdedel C istället,
- C använder nästa månad en tredjedel A och en tredjedel B.

a) Bestäm formler (utan matrismultiplikation) för hur många hushåll som använde de olika fabrikaten månad k. (4p)

b) Månad 0 använde a hushåll A, b använde B och c använde C så att totala antalet husåll är $a + b + c$. Hur stora blir de olika fabrikatens markandsandelar långsiktigt (när $k \to \infty$)? (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående. Att enbart ange ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

a) När $\mathbf{v}_1$ är ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{v}_3$ så är $\mathbf{v}_1$ ortogonal mot $\mathbf{v}_3$.

b) När $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har den triviala lösningen, så har också $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara den triviala lösningen.

c) När A och B är kvadratiska av samma form och summan av elementen i varje kolonn i A respektive B är 1 så gäller samma sak för AB.

7. Visa att om ett vektorrum V har en bas med n vektorer, så är varje uppsättningn av fler än n vektorer i V linjärt beroende. (6p)

JAS