

Matematik CTH

Tentamensskrivning i Komplex analys för F2 / Kf2

Datum: 1995-10-28.

Hjälpmiddel: Tabell som delas ut med skrivningen.

Telefonvakt: Fredrik Ekstedt, ankn. 5308.

OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$u'' - 2u' + u = e^t + \delta(t - 1), \quad t > 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (7p)$$

2. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (7p)$$

3. En gren f av funktionen $(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ är definierad i planet uppskuret mellan i och $-i$ längs imaginäraxeln och uppfyller $f(1) > 0$. Beräkna $f(-1)$. (7p)

4. Given är ekvationen $ze^{a-z} = 1$, $a > 1$. Visa att

(a) ekvationen har en enda rot i $\{|z| \leq 1\}$; (4p)

(b) den roten är reell och positiv. (3p)

5. Funktionen f är analytisk i \mathbb{C} utom i ett ändligt antal punkter, ingen av dessa ligger på reella axeln eller på linjen $\{\text{Im } z = y\}$. Antag att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ (samt att f ej är identiskt lika med noll). Ge tillräckliga villkor för att likheten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy) dx$$

skall gälla. (7p)

6. Låt funktionen f vara analytisk i en punkterad omgivning (eng. "deleted neighbourhood") till punkten z_0 och antag att z_0 är en pol till f . Kan z_0 vara hopningspunkt (eng. "accumulation point") till f :s nollställen? Motivera ditt svar. (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling. (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)