TMA 251
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex analys för F2 / Kf2
Datum: 1997-10-20, kl. 8.45 - 12.45.
Hjälpmedel: Tabell som delas ut med skrivningen.
Telefonvakt: Patrik Lundström, ankn. 5325.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Lös integralekvationen

$$u(t) + 2\int_0^t u(t-\tau)\cos a\tau \, d\tau = \cos at, \quad a > 1\,. \qquad \text{(7p)}$$

2. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,. \qquad \text{(7p)}$$

3. Betrakta ekvationen $z^4 - 5z + 1 = 0$.
(a) Bestäm antalet rötter i $1 < |z| < 2$. (3p)
(b) Bestäm antalet rötter i högra halvplanet. (3p)
(c) Bestäm antalet reella rötter och lokalisera dem. (1p)

4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1,\ \operatorname{Re} z < 1\}\,. \qquad \text{(7p)}$$

5. Låt funktionen f vara analytisk i en punkterad omgivning till punkten z_0. Antag att det finns ett tal $M > 0$ sådant att $|f(z)| \le M$ i hela den punkterade omgivningen. Visa att funktionens Laurentutveckling kring z_0 i den punkterade omgivningen inte innehåller några negativa potenser. (7p)

(Resultatet ovan kan omformuleras på följande sätt: Om z_0 är en isolerad singularitet till f och f är begränsad i en punkterad omgivning till z_0, så är z_0 en hävbar singularitet.)

6. Låt D vara ett område och f vara en funktion, analytisk i D. Antag att det finns $z_0 \in D$ och $n_0 \in \mathbb{N}$ sådana att $f^{(n)}(z_0) = 0$ för alla $n > n_0$. Visa att f är ett polynom av grad högst n_0. (5p)

7. Låt funktionerna u och v vara kontinuerligt deriverbara i en omgivning till punkten z_0 och antag att de satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer i z_0. Visa att funktionen $f = u + iv$ är deriverbar i z_0. (5p)

8. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)