TMA 251
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex analys för F2 / Kf2
Datum: 1998-10-19, kl. 8.45 - 12.45.
Hjälpmedel: Tabell som delas ut med skrivningen.
Telefonvakt: Jarl Lindrud, ankn. 5361.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
===

1. Givet är funktionen

$$f(z) = \frac{z(z^2 - \pi^2)}{\sin z} \quad \text{för } z \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finn den punkt a på reella axeln kring vilken f:s Taylorutveckling har störst konvergensradie. Ange de två första koefficienterna i den Taylorutvecklingen. (7p)

2. Beräkna integralen

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}\,. \qquad \text{(7p)}$$

3. Lös (genom att Laplacetransformera) begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y &= -2t + 1 \\ x'' + 2y' + x &= 0 \end{cases}, \quad x(0) = x'(0) = y(0) = 0.$$

Avgör om lösningarna är begränsade genom att analysera deras Laplacetransformer. (7p)

4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}\,. \qquad \text{(7p)}$$

5. Låt funktionen f vara analytisk i en punkterad omgivning till 0. Antag att det finns en konstant C sådan att

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}}}$$

i hela den punkterade omgivningen. Avgör typen av singularitet i 0. (7p)

6. Antag att f och dess derivata f' är kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}$ och att båda är av exponentiell typ, d.v.s. $|f(t)| \leq Ce^{at}, |f'(t)| \leq Ce^{at}$ för $t > 0$. Om $F(s)$ är Laplacetransformen av f, visa att $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$ $(s \in \mathbb{R})$. (5p)

7. Formulera Cauchys integralformler för en analytisk funktions derivator. (1p) Bevisa integralformeln för första derivatan. (4p)

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)