

1. Beräkning av reella integraler

Residukalkyl kan användas för att beräkna diverse reella integraler av intresse. Vi skall här se på några vanliga typer.

1.1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Låt $P(z)$ och $Q(z)$ vara två polynom utan gemensamma faktorer. Antag att Q saknar reella nollställen och att $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 2$ (där $\text{grad } P$ och $\text{grad } Q$ betecknar polynomens gradtal), så att integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ är konvergent, ja t o m absolutkonvergent. Integrera $P(z)/Q(z)$ runt halvcirkeln i Fig. 1, där R har valts så stort att konturen omsluter alla nollställen till $Q(z)$ i övre halvplanet. Enligt residusatsen är

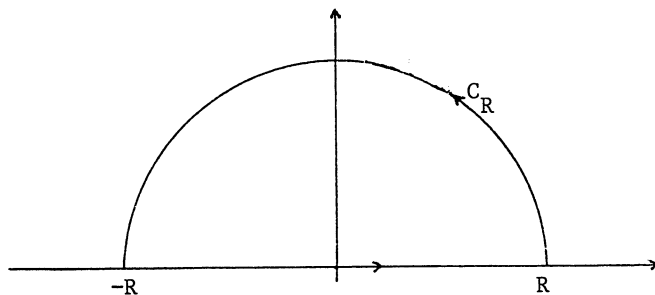


Fig. 1

$$(1.1) \quad \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

där summan i högerledet förstås betyder summan av residuerna av $P(z)/Q(z)$ i alla poler i övre halvplanet. Vi vill nu låta $R \rightarrow \infty$ och visa att den andra integralen i (1.1) går mot 0. Detta följer av följande lemma.

Lemma 1.1. *Antag att $f(z)$ är analytisk i $\text{Im } z \geq 0$, $|z| > R_0$ för något R_0 , och att $zf(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i halvplanet $\text{Im } z \geq 0$. Då är*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Bevis. Antag $R > R_0$ och sätt $M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)|$. Förutsättningen att $zf(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i $\text{Im } z \geq 0$ innebär att $RM_R \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Vi får

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq M_R \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad \text{då } R \rightarrow \infty,$$

varför påståendet följer. □

Tillämpa nu Lemma 1.1 på $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Om $P(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$ och $Q(z) = b_p z^p + \dots + b_1 z + b_0$, så är $m + 1 < p$ enligt förutsättning, och

$$zf(z) = \frac{a_m z^{m+1} + \dots + a_0 z}{b_p z^p + \dots + b_0} \rightarrow 0 \quad \text{då } z \rightarrow \infty.$$

Alltså är $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$. Låt $R \rightarrow \infty$ i (1.1) så fås

$$(1.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Exempel. Beräkna $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

Lösning. Integranden är jämn så $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$. Funktionen $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ har poler då $z^4 + 1 = 0$, $z = z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. I övre halvplanet ligger $z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och $z_1 = e^{3i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$. Vi har

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0} = \frac{\bar{z}_0}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i), \\ \text{Res}_{z=z_1} f(z) &= \frac{1}{4z_1} = \frac{\bar{z}_1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i). \end{aligned}$$

Formel (1.2) ger

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i-1-i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

□

1.2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax dx$

Låt $P(z)$ och $Q(z)$ vara som i 1.1 med det undantaget att vi nu bara kräver att $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 1$. Låt $a > 0$ och integrera $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$ runt samma kontur som förut. Residusatsen

ger

$$(1.3) \quad \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$$

för stora R . Eftersom $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ ($z = x + iy$), kan den andra integralen i (1.3) uppskattas som

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| |dz|.$$

Om skillnaden mellan Q :s och P :s gradtal är minst två enheter går detta mot noll som förut, men om skillnaden i gradtal bara är en enhet, är denna uppskattning värdelös, och vi måste hitta på något bättre. Lösningen ges av följande lemma.

Lemma 1.2. (Jordans lemma) (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2aR}$, $a > 0$.

(b) Antag att $f(z)$ är analytisk i $\text{Im } z \geq 0$, $|z| > R_0$ för något R_0 , och att $f(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i halvplanet $\text{Im } z \geq 0$. Om $a > 0$, så är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Bevis. (a) Det framgår av Fig. 2 att $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ för $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

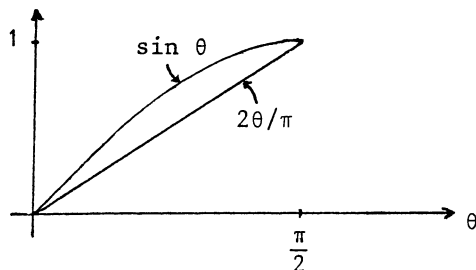


Fig. 2

Detta ger

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR(2\theta/\pi)} d\theta < \int_0^{\infty} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2aR}.$$

(b) Antag $R > R_0$ och låt igen $M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)|$. Förutsättningen att $f(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i $\text{Im } z \geq 0$ innebär att $M_R \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Vi uppskattar integralen över C_R och utnyttjar (a):

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq [z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi] \leq M_R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} R d\theta \\ &= [\sin \theta \text{ är jämn kring } \theta = \frac{\pi}{2}] = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta \\ &< 2RM_R \cdot \frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi}{a} M_R \rightarrow 0, \quad \text{då } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

vilket bevisar påståendet. □

Låt oss återvända till (1.3) och tillämpa Lemma 1.2 på $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Eftersom $m < p$, gäller att

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_0}{b_p z^p + \dots + b_0} \rightarrow 0 \quad \text{då } z \rightarrow \infty,$$

och Lemma 1.2 ger att $\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Låt $R \rightarrow \infty$ i (1.3) så fås då

$$(1.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \quad (a > 0).$$

Integralen i (1.4) har erhållits som ett principalvärde, dvs som

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx,$$

men det är inte klart att integralen är konvergent i vanlig mening, vilket kräver att $\int_{-A}^B \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx$ har ett gränsvärde då A och B går mot ∞ oberoende av varandra. (För att klargöra skillnaden, observera att t ex $PV \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0$, medan $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ inte existerar.) I (1.2) var detta inget problem, eftersom vi från början visste att integralen var konvergent. Att detsamma gäller i (1.4) kan visas genom att använda en annan integrationskontur eller direkt genom partialintegration. Med $R(x) = P(x)/Q(x)$ fås

$$(1.5) \quad \int_{-A}^B R(x) e^{iax} dx = \left[R(x) \frac{e^{iax}}{ia} \right]_{-A}^B - \frac{1}{ia} \int_{-A}^B R'(x) e^{iax} dx.$$

Den utintegrerade termen går mot 0 då A och B går mot ∞ . Eftersom $R'(x)$ är en rationell funktion $P_1(x)/Q_1(x)$, där $\text{grad } Q_1 \geq \text{grad } P_1 + 2$, så är $\int_{-\infty}^{\infty} R'(x) e^{iax} dx$ absolutkonvergent, och integralen i högerledet av (1.5) har ett gränsvärde då A och $B \rightarrow \infty$ oberoende av varandra. Alltså gäller detsamma för vänsterledet, och vi behöver inte ha något "PV" i (1.4).

Om P och Q har reella koefficienter får vi $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax dx$ genom att ta real- resp imaginärdelen av båda leden i (1.4). Observera att man inte kan få t ex $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx$ genom att integrera $R(z) \cos az$ runt konturen i Fig. 1 (varför?), utan man måste gå vägen via (1.4).

Exempel. Beräkna $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Lösning. Vi skriver $I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Funktionen $f(z) = e^{iz}/(z^2 + 2z + 2)$ har poler då $z^2 + 2z + 2 = 0$, $z = -1 \pm i$. I övre halvplanet ligger $z_1 = -1 + i$, och vi har

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \left. \frac{e^{iz}}{2z+2} \right|_{z=z_1} = \frac{e^{i(-1+i)}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{-1-i}.$$

Formel (1.4) ger

$$I = \operatorname{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{1}{2i} e^{-1-i} \right) = \frac{\pi}{e} \sin 1.$$

□

Vi skall nu tillåta att Q kan ha enkla nollställen på realaxeln och se hur (1.4) generaliseras. Vi måste först diskutera begreppet principalvärde litet utförligare. Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ utom i punkten c , definierar vi

$$PV \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right\},$$

om gränsvärdet existerar.

Exempelvis är

$$PV \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right] = 0,$$

medan $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ naturligtvis är divergent.

Flera principalvärden kan kombineras på ett uppenbart sätt.

Exempel.

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon_1 \rightarrow 0^+ \\ \epsilon_2 \rightarrow 0^+}} \left[\int_{-R}^{-1-\epsilon_1} + \int_{-1+\epsilon_1}^{1-\epsilon_2} + \int_{1+\epsilon_2}^R \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = 0.$$

Om Q har ett antal enkla reella nollställen och om förutsättningarna i övrigt är de samma som i anslutning till (1.4), får vi

$$(1.6) \quad PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iaz} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z = 0} \operatorname{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}.$$

Observera att "PV" är helt nödvändigt här, eftersom integralen är divergent.

I beviset kommer vi att utnyttja följande resultat.

Lemma 1.3. Om $f(z)$ har en enkelpol i z_0 , och om C_ϵ är cirkelbågen $z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}$, $\alpha \rightarrow \alpha + \theta_0$, så är

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(z) dz = i\theta_0 \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Bevis. Vi kan skriva

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z)$$

där $c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$, och där $\varphi(z)$ är analytisk i z_0 , så att

$$(1.7) \quad \int_{C_\epsilon} f(z) dz = c_{-1} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{C_\epsilon} \varphi(z) dz.$$

Här är

$$\int_{C_\epsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_\alpha^{\alpha+\theta_0} \frac{1}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = i \int_\alpha^{\alpha+\theta_0} d\theta = i\theta_0,$$

medan

$$\left| \int_{C_\epsilon} \varphi(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_\epsilon} |\varphi(z)| \cdot |\theta_0| \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Låt $\epsilon \rightarrow 0$ i (1.7) så fås påståendet. □

För att bevisa (1.6) låt $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$ och låt x_1, \dots, x_m vara polerna på realaxeln. Integrera $g(z)$ runt konturen i Fig. 3.

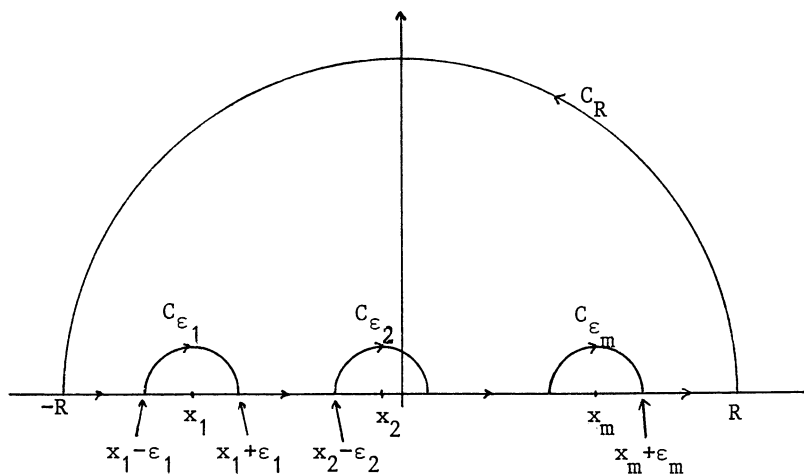


Fig. 3

Om R är stort och $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ små, är

$$(1.8) \quad \int_{C_R} g(z) dz + \int_{-R}^{x_1 - \epsilon_1} + \int_{x_1 + \epsilon_1}^{x_2 - \epsilon_2} + \dots + \int_{x_m + \epsilon_m}^R g(x) dx + \\ + \int_{C_{\epsilon_1}} + \dots + \int_{C_{\epsilon_m}} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} g(z).$$

Vi får att $\int_{C_R} g(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$ som förut, och enligt Lemma 1.3 gäller att

$$\int_{C_{\epsilon_k}} g(z) dz \rightarrow -\pi i \operatorname{Res}_{z=x_k} g(z) \quad \text{då} \quad \epsilon_k \rightarrow 0, k = 1, \dots, m.$$

Låt $R \rightarrow \infty$ och $\epsilon_k \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, m$, i (1.8) så erhålles (1.6). \square

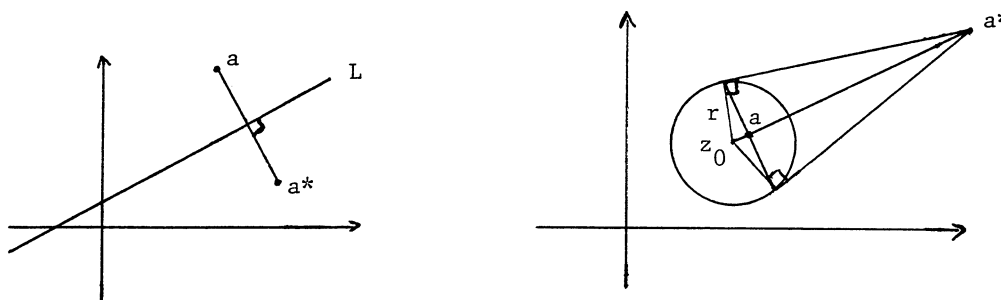
Formel (1.6) används oftast för att beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax dx$ eller $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax dx$, där de reella nollställena till $Q(x)$ motsvaras av nollställen till $\cos ax$ eller $\sin ax$. Integranden är då (kan uppfattas som) kontinuerlig i dessa punkter, så något principalvärde behövs inte. Konvergensen i oändligheten är heller inget problem, som vi såg i (1.5).

Exempel.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\pi i \cdot 1] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Möbiusavbildningar och inversa punkter

Definition. Två punkter a och a^* kallas **inversa m.a.p. linjen** L , om de är varandras spegelbilder i L . Punkterna a och a^* kallas **inversa m.a.p. cirkeln** $|z - z_0| = r$, om a och a^* ligger på samma förlängda radie och $|a - z_0| \cdot |a^* - z_0| = r^2$, dvs. om $(a - z_0)(a^* - z_0) = r^2$. Vidare är z_0 och ∞ inversa m.a.p. cirkeln.



Låt C vara en cirkel eller rät linje och $T(z)$ en Möbiusavbildning. Då är som bekant bildkurvan $C' = T(C)$ också en cirkel eller rät linje.

Sats 2.1. Antag att a och a^* är inversa m.a.p. C . Då är $T(a)$ och $T(a^*)$ inversa m.a.p. C' .

Beviset bygger på två lemmor.

Lemma 2.1. *Låt C vara en cirkel eller rät linje och låt a och a^* ($a, a^* \neq \infty$) vara inversa m.a.p. C . Då är*

$$\left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = k, \quad z \in C,$$

där $k = 1$ då C är en rät linje, och $k = |a - z_0|/r$ då C är cirkeln $|z - z_0| = r$.

Bevis. Uppenbart från definitionen då C är en rät linje. Om C är cirkeln $|z - z_0| = r$, kan vi skriva

$$a = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad a^* = z_0 + \frac{r^2}{\rho} e^{i\varphi}, \quad \text{där } \rho = |a - z_0|.$$

Punkterna på C är av formen $z = z_0 + r e^{i\theta}$. Då gäller

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{z - a^*} &= \frac{r e^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}}{r e^{i\theta} - \frac{r^2}{\rho} e^{i\varphi}} = \frac{\rho r e^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}}{r \rho e^{i\theta} - r e^{i\varphi}} = \\ &= -\frac{\rho}{r} e^{i\theta} e^{i\varphi} \frac{\rho e^{-i\theta} - r e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\theta} - r e^{i\varphi}}. \end{aligned}$$

I det sista bråket är täljaren konjugatet av nämnaren, varför bråkets belopp är 1. Alltså är

$$\left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = \frac{\rho}{r}.$$

□

Lemma 2.2. *Låt p och q vara olika komplexa tal och $k > 0$. Ekvationen*

$$(2.1) \quad \left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k$$

betyder en rät linje då $k = 1$ och en cirkel med medelpunkt $z_0 = (p - k^2 q)/(1 - k^2)$ och radie $r = k|p - q|/|1 - k^2|$ då $k \neq 1$. p och q är inversa punkter m.a.p. linjen resp. cirkeln.

Bevis. Påståendet är klart om $k = 1$, så låt $k \neq 1$. Ekvation (2.1) kan skrivas

$$\begin{aligned} (z - p)(\bar{z} - \bar{p}) &= k^2(z - q)(\bar{z} - \bar{q}), \\ (1 - k^2)z\bar{z} - (\bar{p} - k^2\bar{q})z - (p - k^2q)\bar{z} &= k^2|q|^2 - |p|^2, \\ z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} &= \frac{k^2|q|^2 - |p|^2}{1 - k^2}, \\ |z - z_0|^2 &= z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = \frac{k^2|q|^2 - |p|^2}{1 - k^2} + |z_0|^2. \end{aligned}$$

Efter litet räknande fås att det sista uttrycket är lika med r^2 , och därmed är det första påståendet klart. Slutligen är

$$p - z_0 = \frac{k^2(q - p)}{1 - k^2}, \quad q - z_0 = \frac{q - p}{1 - k^2},$$

$$(p - z_0)\overline{(q - z_0)} = r^2,$$

vilket visar påståendet om inversa punkter. \square

Bevis av Sats 2.1. Avbildningen $T(z)$ kan skrivas som en sammansättning av avbildningar av formen $T_1(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$, och $T_2(z) = \frac{1}{z}$. Därför räcker det att visa påståendet för var och en av dessa avbildningar.

Antag först att $a, a^* \neq \infty$. Enligt Lemma 2.1 och Lemma 2.2 kan ekvationen för C skrivas på formen

$$(2.2) \quad \left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = k.$$

Om $w = T_1(z) = \alpha z + \beta$ och $z \in C$, är enligt (2.2)

$$\left| \frac{w - T_1(a)}{w - T_1(a^*)} \right| = \left| \frac{\alpha z + \beta - (\alpha a + \beta)}{\alpha z + \beta - (\alpha a^* + \beta)} \right| = \left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = k.$$

Enligt Lemma 2.2 är då $T_1(a)$ och $T_1(a^*)$ inversa m.a.p. $T_1(C)$. Om $w = T_2(z) = \frac{1}{z}$ och $z \in C$, är, om $a, a^* \neq 0$,

$$\left| \frac{w - T_2(a)}{w - T_2(a^*)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{a^*}} \right| = \left| \frac{a^*}{a} \right| \left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = \frac{k|a^*|}{|a|},$$

och Lemma 2.2 visar att $T_2(a)$ och $T_2(a^*)$ är inversa m.a.p. $T_2(C)$. Om $a = 0$, är

$$|w - T_2(a^*)| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{a^*} \right| = \frac{1}{|a^*|} \left| \frac{z - a^*}{z} \right| = \frac{1}{k|a^*|},$$

vilket visar att bilden är en cirkel med $T_2(a^*)$ och $T_2(a) = \infty$ som inversa punkter. Fallet $a^* = 0$ behandlas analogt.

Om $a = \infty$, är $a^* = z_0$, om C är cirkeln $|z - z_0| = r$. Då är $T_1(a) = \infty$ och $T_1(a^*) = \alpha z_0 + \beta$ inversa m.a.p. $T_1(C)$, eftersom cirkeln $T_1(C)$ har medelpunkten $\alpha z_0 + \beta$. Vidare är $T_2(a) = 0$ och $T_2(a^*) = \frac{1}{z_0}$ inversa m.a.p. $T_2(C)$. Detta är klart om $z_0 = 0$, och om $z_0 \neq 0$ är för $z \in C$

$$\left| \frac{T_2(z) - 0}{T_2(z) - \frac{1}{z_0}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}} \right| = \frac{|z_0|}{|z - z_0|} = \frac{|z_0|}{r},$$

och påståendet följer av ännu en tillämpning av Lemma 2.2. Fallet $a = z_0$, $a^* = \infty$ behandlas analogt. Därmed är satsen bevisad. \square

Sats 2.1 kan användas för att enkelt lösa vissa avbildningsproblem.

Problem 1. Avbilda en cirkel eller rät linje C på en cirkel eller rät linje C' .

Lösning. Problemet kan lösas genom att man avbildar en punkt $z_1 \in C$ på en punkt $w_1 \in C'$ och ett par av inversa (m.a.p. C) punkter z_2 och z_2^* (som ej ligger på C) på ett par av inversa (m.a.p. C') punkter w_2 och w_2^* . Dessa punkter bestämmer en Möbiusavbildning $T(z)$; se Fisher, sid. 198-199 för det grundläggande problemet att avbilda tre punkter på tre punkter. Bilden $T(C)$ av C är en cirkel eller rät linje, som går genom w_1 och som har w_2 och w_2^* som inversa punkter (Sats 2.1). Nu finns det bara en cirkel eller rät linje med denna egenskap. Detta kan man inse genom att införa den Möbiusavbildning $\zeta = S(w)$, som avbildar w_1 på 1, w_2 på 0 och w_2^* på ∞ . Bilderna av $T(C)$ och C' är då cirklar, som går genom 1 och som har 0 och ∞ som inversa punkter. Det finns dock bara en sådan cirkel, nämligen $|\zeta| = 1$. Alltså $ST(C) = S(C')$, varför $T(C) = C'$.

Problem 2. Avbilda ett område Ω begränsat av en cirkel eller rät linje C på ett område Ω' begränsat av en cirkel eller rät linje C' .

Lösning. Avbilda C på C' enligt Problem 1 så att någon punkt i Ω avbildas på någon punkt i Ω' . Därvid kommer Ω att avbildas på Ω' ; se Fisher, övn. 10, sid. 205.

3. Laplacetransformer

I vissa tillämpningar har vi behov av att kunna Laplacetransformera (generaliserade) funktioner innehållande impulsiva singulariteter, dvs. δ -”funktioner” och eventuellt derivator av sådana. Detta är ganska problemfritt utom då vi har en impulsiv singularitet i origo. Vi tänker oss som vanligt att $f(t) = 0$ för $t < 0$ och definierar

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Exempelvis är

$$(\mathcal{L}\delta)(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1.$$

δ -funktioner kan uppträda i högerledet i differentialekvationer. Ett enkelt exempel:

$$(3.1) \quad u'' + u = \delta(t).$$

En sådan ekvation måste tolkas inom teorin för generaliserade funktioner (eller distributioner), och derivatorna måste avse generaliserade derivator. Låt oss söka en lösning sådan att $u(t) = 0$ för $t < 0$ och försöka bestämma den med Laplacetransformering. Vi behöver

då regeln för Laplacetransformering av derivator. Med generaliserad derivata och med $f(t) = 0$ för $t < 0$ har vi

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f')(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= s \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \end{aligned}$$

dvs

$$(3.2) \quad (\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s).$$

Analogt för högre derivator:

$$(\mathcal{L}f^{(k)})(s) = s^k(\mathcal{L}f)(s).$$

Laplacetransformerar vi nu (3.1) får vi med $U(s) = \mathcal{L}u(s)$:

$$\begin{aligned} s^2U(s) + U(s) &= 1, \quad U(s) = \frac{1}{1+s^2}, \\ u(t) &= \sin t \cdot \theta(t). \end{aligned}$$

Jämför (3.2) med den tidigare formeln (se Fisher, Example 2, sid. 348, eller Folland, Theorem 8.1(c))

$$(3.3) \quad (\mathcal{L}f')(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0),$$

där $f'(t)$ är den styckvisa derivatan för $t \geq 0$. Ett enkelt exempel belyser skillnaden i synsätt mellan (3.2) och (3.3). Betrakta $f(t) = \theta(t)(= H(t))$. I (3.3) betraktar vi enbart $t \geq 0$ och har $\theta'(t) = 0$ och $\theta(0) = \theta(0^+) = 1$. Alltså utsäger (3.3)

$$(\mathcal{L}\theta')(s) = 0 = s\mathcal{L}\theta(s) - 1,$$

vilket är korrekt, ty $\mathcal{L}\theta(s) = \frac{1}{s}$. I (3.2) tar vi hänsyn till $t < 0$ och har $\theta'(t) = \delta(t)$, varvid (3.2) ger

$$(\mathcal{L}\theta')(s) = \mathcal{L}\delta(s) = 1 = s\mathcal{L}\theta(s),$$

vilket också är korrekt.

Vi har tidigare sett hur en given funktion $f(t)$ kan återvinnas ur sin Laplacetransform genom en viss konturintegral, som vi kallar inversionsintegralen. Nu är situationen ofta den motsatta: vi har en funktion $F(s)$ given och vi vill ta reda på om $F(s)$ är Laplacetransformen av någon funktion $f(t)$. Förhoppningen är att $f(t)$ skall kunna erhållas med hjälp av inversionsintegralen, men det är tyvärr inte alltid sant; det kan nämligen hända att inversionsintegralen konvergerar mot en funktion, som inte har $F(s)$ som sin Laplacetransform (se Folland, Exercise 10, sid. 273). Med lämpliga förutsättningar på $F(s)$ kan man dock få det önskade resultatet. Vi skall nedan ge två exempel på situationer, där $F(s)$ verkligen är Laplacetransformen av den funktion $f(t)$ som erhålles ur inversionsintegralen. Först kan man fråga sig vilka funktioner $F(s)$ som kan uppträda som Laplacetransformer.

Det är inte lätt att ge något enkelt svar på den frågan. Ett par egenskaper hos Laplace-transformer kan vi dock notera. Vi har tidigare sett att en Laplacetransform är analytisk i ett halvplan $\operatorname{Re} s > a$. En annan enkel egenskap ges i följande sats. Vi betraktar där funktioner $f(t)$ utan impulsdelar.

Sats 3.1. *Låt $f(t)$ vara sådan att $|f(t)| \leq Ce^{at}$ för $t \geq 0$ för vissa konstanter C och a . Då gäller för Laplacetransformen $F(s)$ att $F(s) \rightarrow 0$ då $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$.*

Bevis. Antag $\sigma = \operatorname{Re} s > a$. Då är

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt = \\ &= \int_0^\infty |f(t)|e^{-at} e^{-(\sigma-a)t} dt \leq C \int_0^\infty e^{-(\sigma-a)t} dt = \\ &= \frac{C}{\sigma - a} \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Sats 3.2. *Antag att $g(s)$ är analytisk i hela s -planet utom i ändligt många singulära punkter s_k , och att $g(s) \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$. Då är $g(s)$ Laplacetransformen av*

$$(3.4) \quad f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} (g(s)e^{st}).$$

Om det reella talet a är sådant att $\operatorname{Re} s_k < a$ för alla k , gäller vidare att

$$(3.5) \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st} ds = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

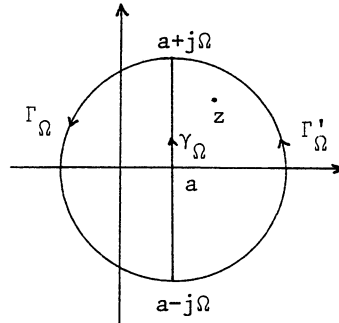
Bevis. Välj Ω så stort att alla s_k ligger innanför konturen $C = \gamma_\Omega + \Gamma_\Omega$ i figuren. Med $f(t)$ definierat av (3.4) ger residusatsen

$$(3.6) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_\Omega} + \int_{\Gamma_\Omega} g(s)e^{st} ds \right].$$

För $t \geq 0$ har vi uppskattningen

$$(3.7) \quad |f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C |g(s)| e^{(\operatorname{Re} s)t} |ds| \leq \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_C |g(s)| |ds| = Me^{at}.$$

Alltså har $f(t)$ en Laplacetransform. Låt oss visa att den är $g(s)$.



Fixera z med $\operatorname{Re} z > a$ och låt $\Omega > |z - a|$. Enligt Fubinis sats om omkastning av integrationsordningen är

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_C g(s)e^{-(z-s)t} ds dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s) \int_0^\infty e^{-(z-s)t} dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(s)}{z-s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds. \end{aligned}$$

Enligt Cauchys integralformel är

$$(3.9) \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds.$$

Om $C_\Omega = \Gamma'_\Omega + \Gamma_\Omega$ är cirkeln $|s - a| = \Omega$, fås alltså ur (3.8) och (3.9)

$$(3.10) \quad g(z) - \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds.$$

Nu skall vi utnyttja att $g(s) \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$, vilket är liktydigt med att $\max_{s \in C_\Omega} |g(s)| \rightarrow 0$ då $\Omega \rightarrow \infty$. Vi har

$$\left| \int_{C_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds \right| \leq \frac{\max_{s \in C_\Omega} |g(s)|}{\Omega - |z-a|} \cdot 2\pi\Omega \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \Omega \rightarrow \infty.$$

Låt $\Omega \rightarrow \infty$ i (3.10) så fås

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt = g(z),$$

vilket bevisar påståendet om f 's Laplacetransform.

Om man så vill, följer nu (3.5) av inversionssatsen, men vi skall ge ett direkt bevis i detta fall. Om $t > 0$ följer av Jordans lemma (Lemma 1.2) (gör substitutionen $z = -i(s - a)$) att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\Omega} g(s)e^{st} ds = 0.$$

Alltså ger (3.6) att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st} ds = f(t) \quad \text{för } t > 0.$$

Om $t < 0$ följer på samma sätt att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\Gamma'_\Omega} g(s)e^{st} ds = 0,$$

och eftersom enligt Cauchys sats

$$\int_{\Gamma'_\Omega} g(s)e^{st} ds - \int_{\gamma_\Omega} g(s)e^{st} ds = 0,$$

är

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st} ds = 0 \quad \text{för } t < 0.$$

□

Exempel 3.1. Förutsättningarna i Sats 3.2 är uppfyllda för rationella funktioner $g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, där $\text{grad } P < \text{grad } Q$.

Exempel 3.2. $g(s) = \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}$ uppfyller förutsättningarna i Sats 3.2. Den enda singulariteten är i origo, så $g(s)$ är Laplacetransformen av

$$f(t) = \text{Res}_{s=0} g(s)e^{st}.$$

Nu är

$$\begin{aligned} g(s)e^{st} &= \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}e^{st} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n s^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k t^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^k}{n!k!} s^{k-n-1}. \end{aligned}$$

Koefficienten för s^{-1} fås genom att summera alla termer med $k = n$, så att residun är

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2n} = \underline{J_0(2\sqrt{t})}.$$

Nästa resultat meddelar vi utan bevis. En liknande sats finns i Folland, Theorem 8.5.

Sats 3.3. Antag att (1) $F(s)$ är analytisk för $\operatorname{Re} s \geq a$, (2) $|F(s)| \leq \frac{C}{|s|^\alpha}$ för $\operatorname{Re} s \geq a$, där $\alpha > 0$, och $|F'(s)| \leq \frac{C'}{|s|^\beta}$ för $\operatorname{Re} s \geq a$, där $\beta > 1$, eller (2') $|F(s)| \leq \frac{C}{|s|^\alpha}$ för $\operatorname{Re} s \geq a$, där $\alpha > 1$.

Då är $F(s)$ Laplacetransformen av

$$(3.11) \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Exempel 3.3. $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-c\sqrt{s}}$ (principalgrenen av \sqrt{s}) uppfyller förutsättningarna (1) och (2') i Sats 3.3 med godtyckligt $a > 0$ om $c > 0$ (ty $e^{-c\sqrt{s}}$ går mot noll fortare än varje potens av $|s|$ då $|s| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} s \geq a > 0$). Om $c = 0$ är i stället förutsättningarna (1) och (2) uppfyllda. Integralen i (3.11) kan beräknas med residukalkyl som i Folland, sid. 271-272. Resultatet är att

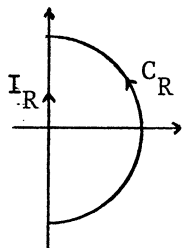
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{c^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

Exempel 4.3. Hur många nollställen har $P(s) = s^5 - s^4 + 2s^3 + 1$ för $\operatorname{Re} s \geq 0$?

Lösning. På imaginäraxeln är $s = i\omega$, och

$$P(i\omega) = 1 - \omega^4 + i(\omega^5 - 2\omega^3) \neq 0.$$

Låt R vara så stort att alla nollställen i $\operatorname{Re} s > 0$ uppfyller $|s| < R$, och låt s gå runt konturen i figuren.



$$C_R = \{Re^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$I_R = \{s = i\omega : -R \leq \omega \leq R\}$$

Låt N vara antalet nollställen i högra halvplanet. Enligt argumentprincipen är

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R - I_R} \arg P(s) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R} \arg P(s) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{I_R} \arg P(s).$$

Nu är

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \arg P(s) &= \Delta_{C_R} \arg s^5 \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}\right) = \\ &= \Delta_{C_R} \arg s^5 + \Delta_{C_R} \arg \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}\right) = \\ &= 5\pi + \Delta_{C_R} \arg \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}\right). \end{aligned}$$

Eftersom kurvan $z = 1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}$, $s \in C_R$, krymper mot punkten 1, då $R \rightarrow \infty$, så är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \arg P(s) = 5\pi.$$

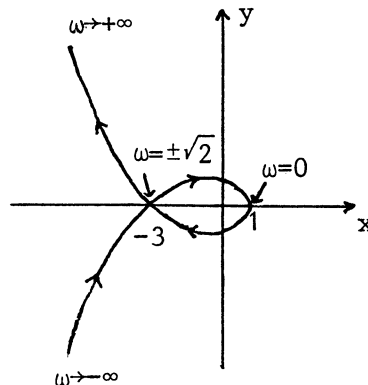
Om I får beteckna den positivt orienterade imaginäraxeln, är alltså

$$N = \frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi} \Delta_I \arg P(s).$$

Skissera kurvan $z = x + iy = P(i\omega)$, och studera argumentvariationen då ω växer från $-\infty$ till $+\infty$. Vi har

$$\begin{cases} x = 1 - \omega^4, \\ y = \omega^3(\omega^2 - 2). \end{cases}$$

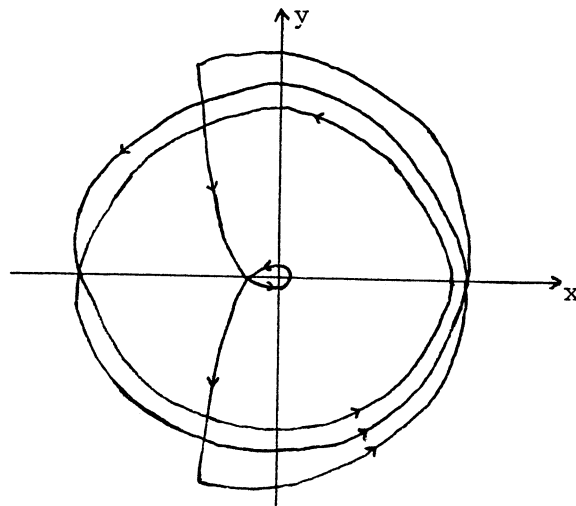
Det är viktigast att se på y 's nollställena och tecknet på y mellan nollställena samt på vad som händer då $\omega \rightarrow \pm\infty$. Vi ser att $y = 0$ då $\omega = 0$ och $\omega = \pm\sqrt{2}$, vilket ger $x = 1$ resp. $x = -3$. Kurvan $z = P(i\omega)$ i stora drag:



Eftersom $\frac{y}{x} \rightarrow -\infty$ då $\omega \rightarrow +\infty$, och $\frac{y}{x} \rightarrow +\infty$ då $\omega \rightarrow -\infty$, ser vi från figuren att $\arg P(i\omega)$ avtar från $\frac{3\pi}{2}$, säg, till $-\frac{3\pi}{2}$, dvs $\Delta_I \arg P(s) = -3\pi$. Alltså är

$$N = \frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi}(-3\pi) = 4.$$

Som en variant kan man rita kurvan $z = P(s)$, då s genomlöper hela den slutna, positivt orienterade, kurvan $\Gamma_R = C_R - I_R$ för ett fixt (men tillräckligt stort) R . Då får man en bild av ungefär följande utseende:



Man ser att kurvan går fyra varv runt origo, dvs $\Delta_{\Gamma_R} \arg P(s) = 8\pi$, och $N = 4$. Observera att imaginäraxeln nu genomlöps med avtagande ω i stället för växande som ovan. \square

Exempel 4.4. För vilka reella värden på $K \neq 0$ saknar ekvationen

$$\frac{K}{(s+1)^2(3s-1)} + 1 = 0$$

rötter i halvplanet $\operatorname{Re} s \geq 0$?

Lösning: Den givna ekvationen kan skrivas $H_0(s) + 1/K = 0$, där

$$H_0(s) = \frac{1}{(s+1)^2(3s-1)}.$$

Låt s gå runt samma halvcirkel $C_R - I_R$ som i föregående exempel. Funktionen $H_0(s) + 1/K$ har en pol ($s = 1/3$) i högra halvplanet. Enligt argumentprincipen gäller att funktionen saknar nollställen i $\operatorname{Re} s \geq 0$ om och endast om

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R - I_R} \arg(H_0(s) + 1/K) = 0 - 1 = -1,$$

dvs

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R} \arg(H_0(s) + 1/K) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{I_R} \arg(H_0(s) + 1/K) = -1$$

för alla tillräckligt stora R . Eftersom kurvan $z = H_0(s) + 1/K$, $s \in C_R$, krymper mot punkten $1/K$ då $R \rightarrow \infty$, gäller att

$$\Delta_{C_R} \arg(H_0(s) + 1/K) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad R \rightarrow \infty.$$

Villkoret blir alltså

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_I \arg(H_0(s) + 1/K) = 1.$$

I ord uttryckt innebär detta att kurvan $z = H_0(i\omega) + 1/K$, $-\infty < \omega < \infty$, skall gå ett varv runt origo. Sammanfattningsvis gäller alltså att $H_0(s) + 1/K$ saknar nollställen i $\operatorname{Re} s \geq 0$

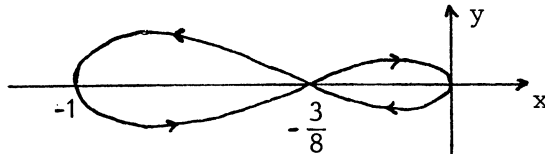
om och endast om kurvan $z = H_0(i\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$, går ett varv i positiv led runt (men inte igenom) punkten $-1/K$. Låt oss studera denna kurva. Vi har

$$\begin{aligned} z = x + iy = H_0(i\omega) &= \frac{1}{(1 + i\omega)^2(-1 + 3i\omega)} = \frac{(1 - i\omega)^2(-1 - 3i\omega)}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)} = \\ &= \frac{-1 - 5\omega^2 + i\omega(3\omega^2 - 1)}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)}, \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{cases} x = -\frac{1 + 5\omega^2}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)}, \\ y = \frac{\omega(3\omega^2 - 1)}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)}. \end{cases}$$

Vi ser att $x < 0$ för alla ω ; $y = 0$ då $\omega = 0$ och $\omega = \pm 1/\sqrt{3}$, och motsvarande x -värden är $x = -1$ resp. $x = -\frac{3}{8}$. Studera y :s tecken mellan nollställena, och notera att både x och y går mot 0 då $\omega \rightarrow \pm\infty$. Dessa observationer räcker för att kurvan skall kunna skisseras. Man får följande ungefärliga utseende:



Man ser att de punkter $-1/K$ på realaxeln som omringas +1 varv av kurvan, uppfyller $-1 < -1/K < -\frac{3}{8}$. Alltså saknar den givna ekvationen rötter i $\text{Re } s \geq 0$ om och endast om $1 < K < \frac{8}{3}$. \square

Anmärkning. Bilden av imaginäraxeln under avbildningen $H_0(s)$ brukar kallas **Nyquist-diagrammet**.

Övningsexempel

- 1) Låt $F(s) = P(s)/Q(s)$, där P och Q är polynom med grad $P < \text{grad } Q$. Antag att Q endast har enkla nollställen a_1, \dots, a_m . Visa att $F(s)$ är Laplacetransformen av

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}. \quad (\text{Heavisides expansionsats})$$

2) Använd argumentprincipen för att bestämma antalet nollställen med positiv realdel till följande polynom.

a) $P(s) = s^4 + 5s^3 + 2s + 10$.

b) $P(s) = 2s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + s + 1$.

3) Avgör för vart och ett av följande fall för vilka reella värden på K som ekvationen saknar rötter i $\operatorname{Re} s \geq 0$. Skissera ett lämpligt Nyquistdiagram.

a) $\frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} + 1 = 0, T_1, T_2 > 0,$

b) $\frac{K(s + 2)}{(s + 1)(s - 3)} + 1 = 0,$

c) $\frac{K}{(s + 1)^3} + 1 = 0,$

d) $\frac{K(s + 1)}{s^2(s + 4)(s + 5)} + 1 = 0.$

Svar.

2) a) Två b) Två

3) a) $K > -1$ b) $K = 0, K > 2$ c) $-1 < K < 8$ d) $0 \leq K < 99$