Komplex matematisk analys för F2 & Kf2, HT 2006

Sats (karakterisering av hävbar singularitet). Låt f ha isolerad singularitet i z_0. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(i) f:s Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 innehåller inga negativa potenser av $z - z_0$;
(ii) f har ett (ändligt) gränsvärde då $z \to z_0$;
(iii) f är begränsad i en punkterad omgivning till z_0.

Bevis. *(i)* ?$\Rightarrow$ *(ii)*
Av *(i)* följer att

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \qquad \forall z: \ 0 < |z - z_0| < \epsilon,$$

för något $\epsilon > 0$. Vi kan då låta $z \to z_0$ och får att

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = a_0.$$

(ii) ?$\Rightarrow$ *(iii)*
Låt $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ och välj $\epsilon = 1$; då gäller att det finns $\delta > 0$ så att $|f(z) - L| < 1$ för $0 < |z - z_0| < \delta$. Triangelolikheten ger att $|f(z)| < |L| + 1$ för alla z i den punkterade δ-omgivningen till z_0.

(iii) ?$\Rightarrow$ *(i)* (*Riemanns sats*)
Betrakta f:s Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

där

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

och γ kan väljas till cirkeln med medelpunkt z_0 och radie r (r antas vara så litet att γ ligger i den punkterade omgivningen). För koefficienterna med negativa index får vi då

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{m-1} d\zeta, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

och

$$|a_{-m}| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \cdot r^{m-1} \le M r^m \to 0 \quad \text{när} \quad r \to 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Eftersom a_{-m} är oberoende av r, medför detta att $a_{-m} = 0$ för alla naturliga tal m. (OBS! $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)

Sats (karakterisering av pol). Låt f ha isolerad singularitet i z_0. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(i) f:s Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 innehåller ändligt många negativa potenser av $z - z_0$;
(ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Bevis. *(i)* ?⇒ *(ii)* Låt m vara det största naturliga talet, för vilket $a_{-m} \neq 0$ (d.v.s. polens ordning). Vi har att

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}(a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \ldots) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

där $\lim_{z\to z_0} g(z) = a_{-m} \neq 0$. Detta medför att $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

(ii) ?⇒ *(i)* Givet är nu att $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Det betyder att $f \neq 0$ i en punkterad omgivning till z_0, vilket ger att funktionen $h = \frac{1}{f}$ har isolerad singularitet i z_0 och att $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Enligt föregående sats har h hävbar singularitet i z_0, d.v.s. h kan betraktas som analytisk i z_0, och h har nollställe i z_0, vilket ger

$$h(z) = b_m(z-z_0)^m + b_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots, \quad \text{i en omgivning till} \quad z_0 \ (b_m \neq 0,\ m \geq 1).$$

I en punkterad omgivning till z_0 gäller då att

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \ldots},$$

där funktionen

$$g(z) = \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \ldots}$$

är analytisk och icke-noll i en omgivning till z_0 (som kvot mellan två analytiska funktioner, där nämnaren och täljaren är skilda från noll). Därmed har vi

$$g(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots,$$

och

$$f(z) = c_0(z - z_0)^{-m} + c_1(z - z_0)^{-m+1} + \ldots, \qquad (c_0 \neq 0),$$

vilket skulle bevisas.

Sats (karakterisering av väsentlig singularitet). Låt f ha isolerad singularitet i z_0. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(i) f:s Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 innehåller oändligt många negativa potenser av $z - z_0$;
(ii) f har inget gränsvärde när $z \to z_0$, vare sig egentligt eller oegentligt (d.v.s. ändligt eller oändligt).

Bevis. Följer direkt av de två satserna ovan.

Sats (Casorati-Weierstrass). Låt z_0 vara väsentlig singularitet för f. Då gäller att för alla $\alpha \in \mathbb{C}$ kommer f att anta värden godtyckligt nära α i en godtyckligt liten punkterad omgivning till z_0, d.v.s.

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall \epsilon, \eta > 0 \quad \exists z_\eta : 0 < |z_\eta - z_0| < \eta \quad \text{s.a.} \quad |f(z_\eta) - \alpha| < \epsilon.$$

Bevis. Antag motsatsen, d.v.s. antag att

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{C},\ \exists \epsilon_0, \eta_0 > 0 \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \eta_0 \quad \text{gäller} \quad |f(z) - \alpha_0| > \epsilon_0.$$

Det betyder att

$$\frac{1}{|f(z) - \alpha_0|} < \frac{1}{\epsilon_0},$$

och därmed att funktionen

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_0}$$

är begränsad i en punkterad (η_0-)omgivning till z_0. Det ger att F har hävbar singularitet i z_0. Av Riemanns sats (se ovan) följer att F har ett gränsvärde när $z \to z_0$. Låt $\lim_{z \to z_0} F(z) = c$. Om $c \neq 0$ får vi att $\lim_{z \to z_0} f(z) = \frac{1}{c} + \alpha_0$ och därmed att f har hävbar singularitet i z_0, vilket är en motsägelse. Om $c = 0$ får vi $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, vilket betyder att f har pol i z_0 - även detta en motsägelse.

Antagandet av motsatsen till satsens påstående ledde alltså till motsägelse. Därmed är satsen bevisad.