MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2005-10-19, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Elin Götmark, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$u'' + 2u' + 2u = e^{-t} \qquad \text{för} \quad t > 0 \qquad (u = u(t)),$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \qquad \text{(6p)}$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna Fouriertransformen $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{(2p)}$$

3. Bestäm antalet nollställen till polynomet $P(z) = z^5 + 3z + 1$ i cirkelringen $\{1 < |z| < 2\}$. (3p) Gör så mycket du kan för att ytterligare lokalisera rötterna (d.v.s. tala om vilka kvadranter, intervall etc de ligger i; du får använda både reell och komplex analys). (max 4p)

4. Se nästa sida.

5. Låt $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ a_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots, n-1$. Visa att $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$. (6p)

6. Funktionen $f = f(z),\ f \not\equiv 0$, är analytisk i $\{0 < |z| < 2\}$ och uppfyller

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vad är det för typ av singularitet f har i 0? (5p)

7. Se nästa sida.

8. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring 0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}. \qquad (7p)$$

MVE025 (F, "nya" kursen) 7. Formulera och bevisa Schwarz lemma. (5p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}. \qquad (7p)$$

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Ange två Laurentutvecklingar kring $z_0 = i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Redogör noga för var de gäller. (7p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

/JM