

MVEO25 (TMA 252, 253)

Komplex matematisk analys F/Kf

Lösningar 24/10-2008

①

(a) $\frac{\sin(z+1)}{z+1}$;

(b) $\frac{1}{(z+1)^3}$; (c) $e^{\frac{1}{z+1}}$;

(d) $\frac{2}{z+1}$; (e) $\text{Log}(z+1)$.

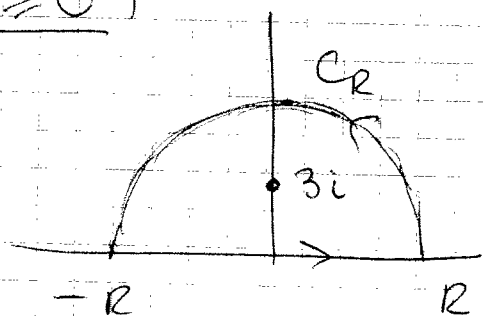
②

(a) $f(z) = \frac{ze^{iaz}}{(z^2+9)^2}$, där $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{x \cos ax}{(x^2+9)^2}}_{\text{udde}} dx = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+9)^2} dx &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+9)^2} dx = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+9)^2} dx \end{aligned}$$

$a \geq 0$



$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

$$C_R: z = Re^{i\varphi}$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad (R > 3)$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+9)^2} dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{i R e^{2i\varphi} e^{ia R \cos \varphi} e^{-a R \sin \varphi}}{(R^2 e^{2i\varphi} + 9)^2} d\varphi \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{1 \cdot R^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{-a R \sin \varphi}}{(R^2 - 9)^2} d\varphi \leq \begin{cases} a \geq 0 \\ R > 0 \\ \sin \varphi \geq 0 \end{cases} \\ &\leq \frac{R^2}{(R^2 - 9)^2} \cdot \pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

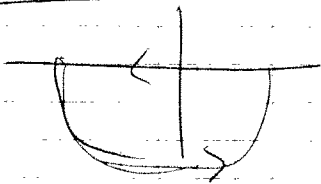
$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \text{Res } f = 2\pi i \text{Res } f_{3i}$$

f har dubbelpol i $3i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Res } f_{3i} &= \left(\frac{z e^{iaz}}{(\cancel{z-3i})^2 (z+3i)^2} \cdot (\cancel{z-3i})^2 \right)' \Big|_{z=3i} = \\ &= \frac{(e^{iaz} + z i a e^{iaz}) (z+3i) - 2(\cancel{z-3i}) z e^{iaz}}{(z+3i)^3} \Big|_{z=3i} = \\ &= \frac{e^{iaz} (\cancel{z} + 3i + z^2 i a - 3az - \cancel{z})}{(z+3i)^3} \Big|_{z=3i} = \\ &= \frac{e^{-3a} (\cancel{3i} - 9ai - 9ai - \cancel{3i})}{6^3 \cdot (-i)} = \frac{ae^{-3a}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+9)^2} dx &= \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{ae^{-3a}}{12 \cdot 6} = \\ &= \frac{\pi a e^{-3a}}{6} \quad \text{for } a \geq 0 \end{aligned}$$

$|a| < 0$ antingen integrera längs 3



eller:

for $a < 0$: $\sin ax = -\sin(-ax) = -\sin|a|x$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2 + 9)^2} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin|a|x}{(x^2 + 9)^2} dx =$$

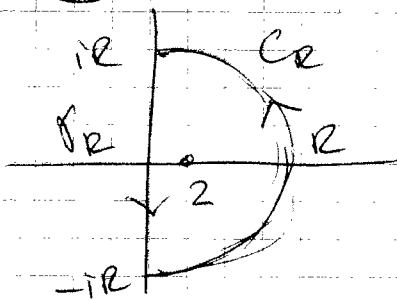
$$= - \frac{\pi |a| e^{-3|a|}}{6} = \frac{\pi a e^{-3|a|}}{6}$$

$$\Rightarrow \text{integralen} = \frac{\pi a e^{-3|a|}}{6} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(b) \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix\xi}}{(x^2 + 9)^2} dx = [a = -\xi]$$

$$= - \frac{\pi i \xi e^{-3|\xi|}}{6}$$

3.2 Rouché's sats på konturen



R stort; På Γ_R gäller:

$$|e^{-z}| = e^{-x} \leq 1$$

(ty $-x \leq 0$ på konturen)

$$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$$

$$|z - 2| \geq 2 \quad \text{på } \gamma_R$$

$$|z - 2| \geq |z| - 2 \geq 2 \quad \text{på } C_R$$

for $R \geq 4$

$$\Rightarrow \text{for } R \geq 4 \quad |z - 2| \geq 2 > 1 \geq |e^{-z}|$$

på Γ_R

$\Rightarrow z-2$ och $z-2+e^{-z}$ har (4)
like många nollställen utanför Γ_R ,
d.v.s. ett

Utanför Γ_R , i hhp?
 $|z-2+e^{-z}| \geq |z-2| - e^{-x} \geq [x \geq 0]$
 $\geq |z|-2-e^{-x} > R-2-e^{-0} =$
 $= R-3 \geq 1$ för $R \geq 4$

$\Rightarrow$ nga nollställen utanför Γ_R

$\Rightarrow$ exakt ett nollställe i hhp

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -1 + \frac{1}{e} < 0 \\ f(2) = e^{-2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{nollstället} \\ \text{reellt, } \in (1, 2)$$

5. Betrakta $F(z) = e^{-f(z)}$; F analytisk
i D och icke-konstant i D
(ty $F'(z) = -f'(z)e^{-f(z)} = 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0$)

$$|F(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq 1 \quad \text{i } D$$

Antag att $\exists z_0 \in D$ s.a.
 $\operatorname{Re} f(z_0) = 0$

$$\Rightarrow |F(z_0)| = e^{-0} = 1 = \max_D |F|$$

z_0 inne punkt (ty D öppen)

$\Rightarrow F \equiv \text{const}$ Motsägelse!

$$\Rightarrow \operatorname{Re} f > 0 \quad \text{i } D$$

⑥ väsentlig singularitet ⑤
 $\Rightarrow$ ej härbart $\Rightarrow f$ ej begränsad
 i någon punkterad omgivning till z_0

$$\Rightarrow \exists z_1 : |z_1 - z_0| < 1 \quad |f(z_1)| > 1$$

$$\exists z_2 : |z_2 - z_0| < 1/2 \quad |f(z_2)| > 2$$

...

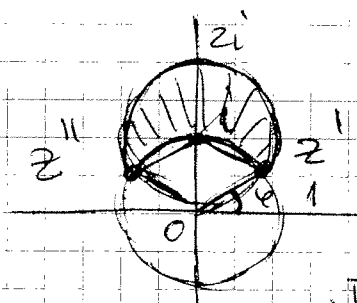
$$\exists z_n : |z_n - z_0| < 1/n \quad |f(z_n)| > n$$

...

$$\Rightarrow z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \quad \text{och} \quad f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(eventuellt $\delta, \delta/2, \dots, \delta/n, \dots$,
 om f ej analytisk i den punkterade
 omgivningen med radie 1)

④



$0, z', i$ bildar
 en liksidig triangel
 $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z'' = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Möbiusavbildning som "rutar ut"
 båda cirkelarna:

$$z' \mapsto 0$$

$$z'' \mapsto \infty$$

$$z_1 = \frac{z - z'}{z - z''} \quad ; \quad 0 \mapsto \frac{z'}{z''} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

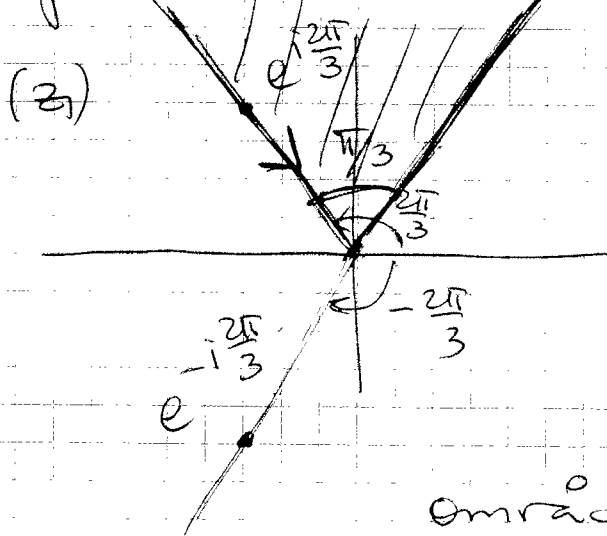
$\Rightarrow$ den övre cirkeln avbildas på rät
 linje genom origo o genom punkten $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$

bågen som når i randen
 avbildas på den stråle från 0 till ∞ som innehåller $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Bågen från den andra cirkeln
 som når i randen:

$$i \rightsquigarrow \frac{i - z'}{i - z''} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} = \frac{z''}{z'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$\Rightarrow$ bågen avbildas på den stråle
 från 0 till ∞ som innehåller $e^{i\frac{2\pi}{3}}$



$$\{z'', i, z'\}$$

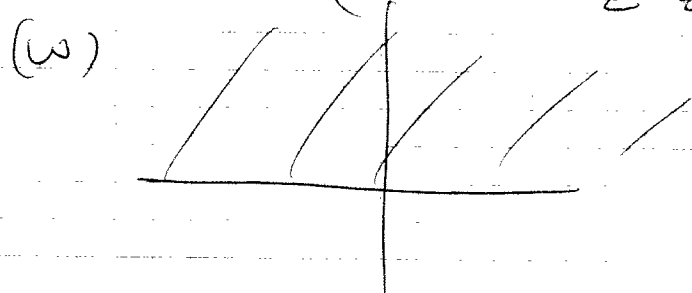
$$\rightsquigarrow \{\infty, e^{i\frac{2\pi}{3}}, 0\}$$

$\Rightarrow$ den markerade
 riktningen
 området på vänster sida

$\Rightarrow$ det avbildas på den streckade
 cirkeln

Återstår: vridning $-\frac{\pi}{3}$ radianer
 samt potens 3

$$\Rightarrow w = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{z - z'}{z - z''} \right)^3$$



4.1

$$\begin{cases} u'' + 2u' + u = \sin t \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

7

$$\Rightarrow s^2 U - s + 2sU - 2 + U = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+1} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+1)} =$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)^2} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} \quad (\text{partialbraksuppdelning})$$

$$\hookrightarrow \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} t e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t$$
