

definition
remark
equationsection

1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM

2011 10 20, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Telefonvakt: Peter Helgesson, 0703/088304

1. a) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$$

- b) Beräkna Fouriertransformen av

$$\frac{x}{(1+x^2)(4+x^2)}.$$

2. a) Bestäm Laurentseriutvecklingen av

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-3)}$$

kring origo i området $2 < |z| < 3$.

- b) I vilka områden har f en Laurentseriutveckling kring punkten 1? (Du behöver inte bestämma utvecklingen.)

3. a) Hur många nollställen har polynomet

$$z^5 - 3z^4 + 2z - 1$$

i vänstra halvplanet?

- b) samma uppgift för polynomet

$$z^5 + 3z^4 + 2z + 1.$$

4. a) Avbilda konformt området

$$\{z; \operatorname{Im}(z) > 0, |z| < 1\}$$

på övre halvplanet.

- b) samma uppgift för området

$$\{w; 0 < \operatorname{Im}(w) < \pi, \operatorname{Re}(w) < 0\}.$$

5. Låt f vara holomorf för $|z| < R$, där $R > 1$, och låt $|z| < 1$.

- a) Visa att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta}z} d\theta.$$

- b) Visa att

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})\bar{z}e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}\bar{z}} d\theta.$$

- c) Visa Poissons formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\theta.$$

6. Låt P vara ett polynom av grad n med endast enkla nollställen, a_j . Visa att om f är en hel funktion och $|z| < R$ där R är tillräckligt stort så är

$$Q(z) := f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{P(z)}{P(w)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

ett polynom av grad högst n sådant att $Q(a_j) = f(a_j)$, $j = 1, \dots, n$.

7. Formulera och bevisa Cauchys integralformel.
8. Formulera och bevisa Rouchés sats.

Lycka till!,
BB